This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Math 5108.99.3

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

Bagnoli, Enrico

GEOMETRIA RETTILINEA E CURVILINEA

TRATTATA

CON METODO PREEUCLIDICO

E

CRONOGONIOMETRIA

per E. B.

ROMA
TIPOGRAFIA IST. GOULD, VIA MARGHERA, 4

1899

Math 5076.11
Math 5108.99.3

HARVARD COLLEGE
SEP 20 1911
LIBRARY
Hauen fund

PREFAZIONE

Gli antichi greci che per primi coltivarono la scenza in Europa, facevano procedere parallelamente lo studio della geometria e del calcolo numerico, applicando all'uno i principii che progressivamente venivano riconoscendo nell'altro.

Questo metodo comparativo in breve condusse a risultati che fecero maravigliare il mondo. Il sommo Euclide abbandonò il modo seguito dai suoi predecessori, e trattò la sua geometria con metodo sintetico, come quello che basandosi sulla stessa scenza più ad essa si addice. Ciò eseguì in modo tanto ammirevole, che non solo fu seguito dalle menti più elette della sua epoca, ma sei dei suoi libri giunti fino a noi, formano tuttora base dell'insegnamento geometrico.

Coll'abbandonare del tutto il sistema comparativo, compì il grande scenziato opera utile al progresso della geometria? ne dubitiamo. Infatti, non appena adottato il solo metodo sintetico si fermò il progresso di questa scenza non per un giorno ma per oltre ventitre secoli. Vedemmo i sommi matematici del quinto, sesto e settimo secolo darsi ai vari rami del calcolo, poco curando la geometria che dichiaravano quasi esaurita e dimostravano impotente a risolvere problemi superiori al secondo grado. È ciò ammissibile? non è forse la geometria grafica il carattere col quale si possono esprimere tutte le quantità immaginabili anche irrazionali? e perchè allora limitarne la potenzialitá e non piuttosto attribuirla alle difficoltà con le quali inceppa il suo progresso il metodo sintetico? Ciò ci siamo più volte richiesti fino al punto di convincerci dell'errato giudizio, e allora abbiamo amaramente lamentato che le scenze e le arti, nelle quali con tanto vantaggio si applica la geometria, siano per tanti secoli state private dei maggiori benefici che potevano trarne. Ci proveremo con questo libro di trascinare nella nostra convizione altri più di noi competenti, affinchè mediante il loro valido concorso si possa raggiungere l'intento di modificare, segnatamente nei corsi tecnici, l'insegnamento della geometria in modo più confacente al vero progresso.

Scritto allo scopo che vogliamo raggiungere, questo nostro lavoro non è un trattato di geometria, ma limitato a toccare saltuariamenie alcune parti di questa scenza per farne rilevare talune speciali facoltà non abbastanza contemplate nell'attuale insegnamento; e poichè nelle nostre dimostrazioni ci siano di frequente serviti del metodo comparativo tra il calcolo geometrico ed il numerico, così forse eccedendo, lo ab-

biamo intitolato *Geometria trattata con metodo preeuclidico.* Affinchè poi lo stesso libro possa riuscire di pratica utilità, abbiamo fatto seguire la parte teorica da varie applicazioni alla topografia; quindi abbiamo dato un cenno sulla *Cronogoniometria*, ossia modo di esprimere ed operare mediante lo stesso carattere numerico tra le quantità eterogenee *angoli* e *tempi.*

Attribuiamo alla graduazione non del tutto geometricamente eseguita dei goniometri in uso, la causa prima degli errori che s' incontrano nei rilievi topografici, e però nella *Parte prima* Capitolo I e II, svolgiamo una teoria sulla formazione e natura degli angoli costruibili o no mediante la riga ed il compasso, indicando un sistema di graduazione della circonferenza del tutto geometrico, il quale dà la misura di angoli sempre graficamente costruibili. In preparazione delle esercitazioni topografiche al Cap. III parliamo degli elementi dei triangoli diversi dai loro angoli, che ne permettono la costruzione e e misura. Allo stesso fine svolgiamo vari teoremi, taluni dei quali hanno importanza speciale. Chiudiamo questa prima parte esponendo un metodo breve ed esatto per la formazione delle tavole trigonometriche.

Nella *Parte seconda*, che ha lo speciale scopo di provare come la geometria si estenda oltre i limiti che le si sono voluti assegnare, al Cap. II e III trattiamo delle potenze e radici delle quantità geometriche di qualunque grado di esponente; poichè nelle dimostrazioni usiamo talvolta il calcolo misto, così per essere meglio compresi, al precedente Cap. I diamo alcuni modi pratici per determinare le radici ennesime numeriche. Nel Cap. IV trattiamo della divisibilità dell'angolo

per un numero che non sia potenza del 2, ciò ci conduce a doverci intrattenere sulla trisezione dell'angolo.

Nella *parte terza*, in cinque Capitoli successivi trattiamo nel modo più breve che ci abbia concesso la chiarezza delle dimostrazioni, della *Geometria elementare curvilinea* della quale non si parla nei corsi ordinari di geometria elementare, sebbene sia di somma utilità ed importanza.

Nella *Parte quarta* abbiamo raggruppato in XI esercitazioni topografiche molti esempi pratici per rilevare e misurare a distanza segmenti e poligoni inaccessibili.

Le soluzioni dei quesiti portati nei detti esempi, parte si fondano sopra metodi noti, parte sono date da nuovi metodi: di questi taluni trovano la loro dimostrazione nei teoremi svolti nella *Parte prima*, di altri la dimostrazione è data nelle rispettive esercitazioni. Chiudiamo la quarta parte con la descrizione di un istrumento che chiamiamo *Aritmètro* mediante il quale si misurano direttamente le distanze ed i seni degli angoli.

Segue un cenno sulla *Cronogoniometria*.

È un desiderato insodisfatto della scenza in genere e della astronomia in specie, di potere determinare un carattere numerico unico per esprimere ed operare tra le due quantità *angoli* e *tempi*.

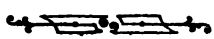
Vogliamo sperare che il metodo da noi proposto trovi l'approvazione degli scenziati.

Il desiderio di riuscire sempre intelligibili alle classi meno colte, ci ha fatto seguire uno stile assai dimeno e non certo della forma eletta richiesta dalla scenza ; vogliamo sperare che di ciò non ci venga fatto un addebito.

Per quanto riguarda la materia trattata, avendo avuto la

temerità di scendere in campo male armati a lottare contro opinioni inveterate da secoli ed oramai divenute convinzioni, non sfuggiremo al certo alla critica la quale nel decorso dell'opera non può mancare di trovare più di un giusto scopo. Vogliamo però sperare che molto ci sarà perdonato per esserci mossi col sincero intendimento di riuscire utili.

Enrico Bagnoli



PARTE PRIMA

CAPITOLO I.

Costruibilità degli angoli ed archi mediante la riga ed il compasso

1. La geometria assegna per misura degli angoli la semisomma o la semidifferenza degli archi che intercettano sulla circonferenza le direzioni dei loro lati, secondochè il vertice degli angoli stessi sia interno o esterno ad essa, e conseguentemente per l'angolo il cui vertice è al centro, assegna l'arco compreso tra i suoi lati. Nonpertanto l'impossibilità di rettificare la circonferenza e perciò gli archi in genere, ha indotto i geometri ad adottare per la misura dell'angolo al centro, la corda dell'arco compreso tra i suoi lati calcolata in parti di raggio, e determinata graficamente cioè mediante la riga ed il compasso. Si è così trovato che il raggio riportato successivamente sulla circonferenza la divide in sei archi uguali, ossia che esso è lato dell'esagono regolare iscritto, e che la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione, riportato successivamente sulla circonferenza la divide in dieci archi uguali, e perciò questo segmento è lato del decagono regolare iscritto.

Ottenuti per tal modo gli archi $\frac{C}{6}$, $\frac{C}{10}$ » ove C è la circonferenza » raddoppiando ciascuno di essi, si otten-

gono gli archi $\frac{C}{3}$, $\frac{C}{5}$, dei quali le corde sono rispettivamente lati del triangolo e del pentagono regolari iscritti; e sottraendo l'uno dall'altro gli stessi archi, e cioè $\frac{C}{6} - \frac{C}{10}$ si determina l'arco $\frac{C}{15}$ del quale la corda è lato del pentadecagono regolare iscritto. Degli archi nel detto modo determinati chiameremo *primari*, i quattro seguenti: 1. *Circonferenza*; 2. *Arco sotteso dal lato del triangolo equilatero iscritto;* 3. *Arco sotteso dal lato del pentagono regolare iscritto*; 4. *Arco sotteso dal lato del pentadecagono regolare iscritto*; talchè, data la circonferenza divisa in 360° gradi, diremo *primari* gli archi ed angoli 360°, 120°, 72°, 24°.

2. La geometria fino ad ora offre un solo modo grafico per determinare un angolo od arco minore di altro dato e che sia in un accertato rapporto con questo, e ciò bisecando successivamente e finchè sia praticamente possibile l'angolo dato, ossia dividendo successivamente per 2 lo stesso angolo. La stessa divisione si eseguisce sul valore in gradi dell'angolo dato dividendolo ordinatamente per le potenze del 2.

a) Diremo per brevità *decomposto nei suoi duennesimi* un angolo successivamente bisecato, od anche il valore di un angolo diviso ordinatamente per le potenze del 2; e diremo *duennesimo* di esso uno qualunque degli angoli inferiori ottenuti sia con le bisettrici successive, sia con la divisione per le potenze del 2.

In genere useremo la stessa espressione per qualsiasi quantità geometrica divisa successivamente per 2, sia graficamente sia nel suo valore.

3. Dividendo successivamente per 2 all'infinito il valore di ciascuno dei quattro archi primari, si forma la seguente;

Tavola dei duennesimi degli archi ed angoli primari espressi in gradi e decimali di grado

Archi primari	360°	120°	72°	24°
Divisori 2	180°	60°	36°	12°
» $4 = 2^2$	90°	30°	18°	6°
» $8 = 2^3$	45°	15°	9°	3°
» $16 = 2^4$	22°,50	7°,50	4°,50	1°,50
» $32 = 2^5$	11°,25	3°,75	2°,25	0°,75
» $64 = 2^6$	5°,625	1°,875	1°,125	0°,375
.. ..	..	..	..	..

Un termine qualunque della tavola, per quanto vogliasi avanzato, esprime in gradi e decimali il valore esatto dell'angolo al centro di un poligono regolare iscrittibile graficamente, e la stessa tavola avanzata indefinitamente contiene tutti i valori degli angoli al centro dei poligoni regolari iscrittibili mediante la riga ed il compasso (1).

4. *Può ottenersi direttamente il duennesimo di grado* n *di una data quantità* a, *dividendo il prodotto* $a.5^n$ *per* 10^n, ossia *avremo* $\frac{a}{2^n} = \frac{a.5^n}{10^n}$; ad esempio il risultato di quattro bisezioni successive dell'angolo 3°, poichè 5^4, = 625, sarà $\frac{3^\circ}{2^4} = \frac{3 \times 625}{10^4} = \frac{1875}{10000} = 0^\circ,1875$.

Se la quantità a è numero fratto o frazionario di p cifre decimali, allora il suo duennesimo di grado n è $\frac{a.5^n}{10^{n+p}}$.

Ad esempio $\frac{3^\circ,75}{2^4} = \frac{3^\circ,75 \times 5^4}{10^{4+2}} = \frac{234375}{1000000} = 0^\circ,234375$.

(1) Il Gaus nella sua opera « Desquisitiones aritmeticae » ha dimostrato la possibilità d'iscrivere nel circolo il poligono regolare di 17 lati, ed in genere tutti i poligoni di n lati quando n è numero primo ed $n-1$ una potenza del 2. Questi poligoni non compresi nella tavola non diciamo graficamente costruibili non essendo a nostra cognizione il modo di determinarne il rispettivo angolo al centro mediante la riga ed il compasso.

5. *Diremo* costruibili *gli angoli ed archi che possono determinarsi mediante la riga ed il compasso*, *e* non costruibili *tutti gli altri.*

6. Sono costruibili gli archi ed angoli primari e i loro duennesimi e multipli per un numero intero all'infinito; nonchè gli angoli ed archi dei quali il valore è costituito dalle possibili combinazioni per somma o differenza fra due o più termini della tavola; quelli il cui valore è prodotto di uno dei termini (ovvero di una delle dette combinazioni per somma o differenza), sia per altro termine della tavola, sia per un numero intero; quelli ancora dei quali il valore è quoto esatto di uno dei termini o di una delle dette combinazioni, sia per altro termine della tavola, sia per un numero intero, che sia divisore esatto del valore angolare dividendo e dia un quoto multiplo di 3; sono espressione di angoli costruibili tutti i duennesimi all'infinito od i multipli per le potenze del 2 di uno qualunque dei valori angolari nei detti modi ottenuto ecc. ecc. Non sono poi graficamente costruibili i valori degli angoli non compresi fra i descritti.

7. Come vedesi dalla tavola, l'arco ed angolo più piccolo di un numero intero di gradi che possa graficamente costruirsi, è l'arco 3° ossia $\frac{24^\circ}{2^3}$, e perciò **l'arco 3° è l'unità geometrica degli angoli ed archi graficamente costruibili.**

Consegue, che dei 360 archi interi nei quali ordinariamente si gradua la circonferenza, *un terzo* ossia *120 sono graficamente costruibili, gli altri due terzi* ossia *240 sono determinati per approssimazione.*

8. Rapporto alla unità 3° distinguiamo gli angoli in genere in *interi*, *fratti* e *frazionari, secondochè il loro va-*

lore è numero intero di gradi maggiore di 3, numero intero o frazionario minore di 3, o numero somma di un angolo intero e fratto.

9. Diremo *angolo base* un angolo intero e dispari; inquantochè moltiplicato e diviso ordinatamente per le potenze del 2, origina una serie ascendente ed altra discendente di angoli ambedue infinite.

10. *Per ridurre un angolo intero al suo* angolo base, *si divide successivamente per 2 il suo valore finchè si ottiene un quoto intero dispari, che è il valore dell'*angolo base *richiesto.*

*Un angolo fratto o frazionario che sia duennesimo di un angolo intero, si riduce all'*angolo base, *moltiplicando il suo valore per quella potenza del 2 che ha l'esponente costituito di tante unità, quante sono le cifre decimali del valore del dato angolo.* Esempi:

Ang. $240^\circ : 2 = 120^\circ$, $120^\circ : 2 = 60^\circ$, $60^\circ : 2 = 30^\circ$, $30^\circ : 2 = 15^\circ$ *angolo base.*

Ang. $1^\circ,3125 \times 2^4 = 21^\circ$ *ang. base*; essendo 4 le cifre decimali.

Ang. $241^\circ,3125 \times 2^4 =$ ang. girato 3861° *ang. base.*

Ossia si costruisce l'ang. 240° raddoppiando per 4 volte successive il suo ang. base 15°; si costruisce l'angolo $1^\circ,3125$ con quattro bisezioni successive del rispettivo angolo base 21°, ed in quanto all'angolo $241^\circ,3125$, per comodo del calcolo e delle costruzioni grafiche, si decompone nei valori di quanti vogliansi angoli costruibili, e determinata la base di ciascuno degli angoli parziali, si ricostruisce l'angolo dato, operando sopra le basi ottenute nei modi descritti, e sommandone i risultati. Faremo cioè ang. $241^\circ,3125 =$ ang. $240^\circ + 1^\circ,3125$; dei quali i rispettivi angoli base sono come si è visto 15° e 21°;

talchè raddoppiando quattro volte successive l'angolo 15° ed aggiungendo al risultato quello ottenuto con quattro bisezioni successive dell'ang. 21°, si formerà quello richiesto ang. 241°,3125.

11. Può determinarsi *a priori*, se un angolo del quale è noto il valore, sia costruibile o no:

Infatti un angolo intero è costruibile se il suo valore è multiplo di 3°, ossia se la somma delle cifre del numero esprimente il suo valore è multiplo di 3°.

Così sono costruibili gli angoli 117° e girato 2673° come multipli di 3. Non sono costruibili gli angoli 118° e girato 2674° non multipli di 3.

Il valore di un angolo fratto o frazionario costruibile è sempre multiplo di 3, **e termina per le cifre decimali** 0, 5 **ovvero** 0°,... 25 **o** 0°,... 75; però questi caratteri che divide con alcuni angoli non costruibili, sono insufficenti a determinarlo; e perciò per *accertarne la costruibilità dovrà ridursi all'angolo base, e se questo risulterà costruibile lo sarà anche l'angolo proposto.* Esempio:

Ang. 1°,3125 di base 21° è costruibile tale essendo ang. 21°.

Ang. 4°,0875 di base 65°,40 ang. non costruibile.

12. *Una operazione qualunque si eseguisce graficamente fra due o più angoli, effettuando prima numericamente la voluta operazione fra i valori dei dati angoli, per quindi costruire l'angolo risultato nei modi sopraindicati.* Le esercitazioni topografiche che seguono la teoria offrono degli esempi di tali operazioni.

13. Prevale erroneamente l'idea che sia difficile determinare degli angoli graficamente divisibili per uno o più numeri primi, inquantochè **un angolo costruibile è divisibile graficamente per uno o più numeri primi, se questi sono compresi fra i fattori numerici del suo valore.**

Consegue che *decomposto nei modi aritmetici il valore di un angolo costruibile nei suoi fattori primi, esso è graficamente divisibile per uno qualunque di questi fattori primi, esclusione fatta per una sol volta del fattore 3° come unità angolare.*

Lo stesso angolo è anche graficamente divisibile per i possibili prodotti fra i suoi fattori primi, escluso sempre una volta il fattore 3°; lo è ancora per tutti i duennesimi all'infinito degli stessi fattori e loro combinazioni ecc. ecc., talchè l'angolo dato ammette un numero infinito di divisori grafici: ad esempio vogliansi i divisori grafici dell'angolo 315°.

Ang. 315°	3° (unità angolare)
105	3
35	5
7	7
1	

Decomposto il valore dell'angolo nei suoi fattori primi numerici, come vedesi a lato, si trova che l'ang. 315° è trisecabile, quintisecabile e divisibile per 7, e conseguentemente è anche divisibile per i numeri interi $3 \times 5 = 15$ » $3 \times 7 = 21°$ » $5 \times 7 = 35$ » $3 \times 3 \times 5 = 45°$ » $3 \times 5 \times 7 = 105°$. Eseguendo infatti le divisioni $\frac{315°}{35} = 9°$, $\frac{315}{7} = 45°$ ecc. trovasi che i quoti ottenuti sono espressioni di angoli graficamente costruibili; e perciò si divide graficamente il 315° per uno dei detti divisori, costruendo direttamente nei modi noti gli angoli quoti 45°, 9° .... ecc. Si trova $\frac{315°}{35 : 2^3} = 72°$» $\frac{315°}{7 : 2^2} = 180°$ ecc. ove i quoti sono valori di angoli costruibili; inoltre i multipli del 315° per un numero intero; i suoi duennesimi all'infinito, le combinazioni per somma differenza, e prodotto di tali duennesimi ecc., sono altrettanti valori angolari divisibili graficamente per i divisori del 315°. Vedesi da ciò che **quando un angolo base costruibile, escluso il fattore geometrico 3°, ammette altri divisori grafici, sono infiniti gli angoli costruibili che in**

serie ascendente o discendente sono graficamente divisibili per gli stessi divisori grafici di quell'angolo base.

14. *Per formare con la riga ed il compasso un angolo che risulti graficamente divisibile per uno o più divisori siano o no numeri primi, basta moltiplicare l'unità geometrica* 3° *per il voluto divisore o per il prodotto dei dati divisori.* Così formeremo un angolo *a* divisibile graficamente per *p. g. v.*... se faremo ang. $a = 3^{\circ}pgv$.... Ecco come procederemo in pratica.

Si voglia costruire una serie infinita di angoli che sieno graficamente divisibili per il numero 19.25.

Moltiplicheremo 19,25 per $3^{\circ}.n$, ovvero per $\frac{3^{\circ}.n}{2^{n}}$; ad ipotesi $19{,}25 \times \frac{3^{\circ} \times 7}{2} = 202^{\circ}{,}125$, e qualsiasi multiplo per un numero intero o qualsiasi duennesimo di questo angolo prodotto, sarà valore di angolo divisibile graficamente per 19,25.

Per quanto si è detto, i fattori numerici del dato divisore 19,25 sono divisori grafici di uno qualunque degli angoli nel detto modo ottenuti. Ad esempio faremo: $19{,}25 \times 2^{2} = 77. = 7 \times 11$. Quindi uno qualunque dei detti angoli è anche divisibile graficamente per 7, per 11 e per qualsiasi multiplo e duennesimo di tali divisori ecc.: troviamo infatti $202^{\circ}{,}125 : \frac{11}{2} = 36^{\circ}{,}75$ » $202^{\circ}{,}125 : 11 \times 7 = 2^{\circ}{,}625^{\circ}$ » $202^{\circ}{,}125 : 5 \times 7 = 5^{\circ}{,}775$ ecc. ove i quoti sono valori di angoli costruibili.

15. *Per determinare* a priori *se un angolo è divisibile per un dato numero, si osserva se il suo valore presenta i caratteri aritmetici di divisibilità richiesti dal dato divisore.* Così:

È *trisecabile* un angolo intero del quale la somma delle cifre del suo valore è multiplo di 9.

È *quintisecabile* un angolo del quale il valore è multiplo di 3, e termina per le cifre 5 e 0.

È *divisibile per* 11 il valore angolare multiplo di 3, nel quale la somma delle cifre di posto pari è uguale a quella delle cifre di posto dispari, ovvero nel quale la differenza delle dette somme sia multiplo di 11; e così di seguito.

Degli angoli non costruibili graficamente

16. **Non sono costruibili mediante la riga ed il compasso gli angoli interi, fratti o frazionari dei quali il valore considerato in complesso non è multiplo di 3.**

17. Distinguiamo gli angoli non costruibili in *determinabili* e *non determinabili.*

18. Un angolo *determinabile* è un terzo di altro costruibile. Lo diciamo determinabile, perchè sebbene non possa costruirsi graficamente, pure se è data la sua apertura, può determinarsi esattamente il suo valore in gradi e decimali.

Tutti gli angoli interi non costruibili sono determinabili, *e degli angoli fratti o frazionari lo sono quelli dei quali il valore è duennesimo di* 1°, *ovvero multiplo di un duennesimo di* 1° *per un numero intero.*

19. Il valore degli angoli fratti o frazionari *determinabili* termina per le cifre 0°,5 ovvero 0°,... 25,0°,... 75. Tale carattere però divide con taluni angoli non determinabili e perciò: **Per accertare la determinabilità di un angolo non costruibile si riduce al suo** *angolo base* **moltiplicandolo per il triplo della potenza del 2 che ha l'esponente costituito di tante unità quante sono le cifre decimali dell'angolo dato; il quale sarà determinabile se l' angolo base risulterà**

costruibile. Ad es. per l'ang. 0°,4375, faremo 0°,4375 × 16 × × 3 = 21° angolo costruibile, e perciò ang. 0°,4375 è determinabile. Per l'angolo 62°,4375; lo decomporremo nell'intero 62° e fratto 0°,4375 del quale il primo è determinabile ed il secondo trovasi tale come sopra, quindi ang. 62°,4375 è determinabile ecc.

20. Nell'uso del goniometro, se un angolo formato da due direzioni non abbraccia un arco esatto della graduazione si riporta quest'arco tre volte sulla circonferenza, ed allora se il detto angolo è determinabile, la punta del compasso finisce col cadere sopra una divisione esatta della graduazione, ovvero sopra una parte duennesima dell'arco 1° di essa. Ad esempio riportato sulla graduazione tre volte successive l'apertura di un dato angolo la punta del compasso segni arco 39°,75: ciò indica che il dato angolo è $\frac{39°,75}{3} = 13°,25$ valore esatto di angolo non costruibile.

21. *Mediante la riga ed il compasso, un angolo non costruibile, non può formarsi che per approssimazione, rendendosi cioè costruibile coll'aggiunta al suo valore di un duennesimo del grado 1° tanto piccolo da potersi considerare in pratica trascurabile l'errore.*

Si divida il grado 1° in duennesimi come vedesi a lato.

1°
0°,5
0°,25
0°,125
0°,0625
0°,03125
0°,015625
» » » »

Sia intero l'angolo da costruirsi.

Se il valore assegnato all'angolo supera di un grado quello di altro angolo intero costruibile, si aggiunge ad esso uno dei duennesimi del grado di posto pari, ossia uno dei termini 0°,5 » 0°,125... 0°,03125; se il valore assegnato è inferiore di un grado di altro angolo intero costruibile, allora si aggiunge ad esso un duennesimo del grado di posto dispari e cioè

$1_2 = 0°,25....$ $0°,015625....$ Ciò cangia il valore dell'angolo proposto in quello di angolo costruibile, che differisce dal primo di quantità trascurabile, se tale è il duennesimo del grado aggiunto. Ad esempio, voglia costruirsi con la riga ed il compasso l'ang. $61° = 60° + 1°$. Si riduce costruibile scrivendo $61°,03125 = 60° + 1°,03125$; troviamo *ang. base* $1°,03125 = 33°$; talchè, costruito l'ang. 60°, si aggiunge ad esso il risultato di 5 bisezioni successive dell'ang. 33°. L'angolo così formato differisce dal 61° di $+ 0°,03$. Vogliasi costruire invece l'ang. $62° = 63° - 1°$, allora aggiungendo un duennesimo di posto dispari faremo $62°,015625$. Ang. base $2°,015625 = 129°$, e riunendo all'ang. 60° il risultato di 6 bisezioni dell'ang. 129°, si ottiene un angolo che supera di $0°,015$ il 62°.

Con metodi analoghi, che sarà facile rinvenire agli studiosi, si formano graficamente per approssimazione gli angoli non costruibili fratti e frazionari.

22. Per eseguire mediante la riga ed il compasso le varie operazioni fra i valori di angoli non costruibili, *si rendono costruibili nel detto modo, si opera su questi come è detto al* (12) *e si costruisce l'angolo risultato dalla operazione aritmetica eseguita:* il valore di questo differirà tanto meno da quello ricercato, quante più cifre conterranno i duennesimi del grado 1° aggiunti agli angoli non costruibili prima di operare.

CAPITOLO II.

Dei circoli graduati o goniometri

23. Le primarie officine dei vari Stati e private nelle quali si fabbricano istrumenti geodetici e topografici, possiedono dei congegni meccanici di grande costo (piatteforme) nei quali l'esattezza della graduazione del circolo è rigoro-

samente accertata con tutti i mezzi che la scienza moderna offre in sussidio della grafica geometrica; talchè i goniometri provenienti da tali officine devono ritenersi esatti. Nonpertanto prima di servirsi di un istrumento d'ignota provenienza, è prudente verificare l'esattezza della graduazione del circolo che lo correda (1). Esponiamo un modo pratico per effettuare detta verifica (Fig. 1ª).

Sul filo di una riga sottile FK si stabilisca un segmento FI esattamente uguale al diametro AB del circolo C del quale vuole accertarsi l'esattezza della graduazione. Ogni qualvolta il filo della riga passa per un punto M della graduazione, in modo che gli estremi F, I del segmento uguale al diametro si trovino sopra i due diametri ortogonali prolungati AB, ED, lo stesso filo della riga interseca la circonferenza in un secondo punto H della graduazione, che segna arco $EH = 3.DM$. *Se ciò non avviene la graduazione è errata.*

(La prova si ripete per più coppie di diametri ortogonali variamente inclinate).

Infatti, si traccino i raggi CM, CH e la GM parallela al diametro ED e perciò perpendicolare a quello AB.

Se per ipotesi arco $EH = 3.DM$ sarà, come esterno al circolo. Ang. $CFH = \frac{EH - DM}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$; ossia ang. $CFH = FCM$ perciò il triangolo CMF è isoscele ed il suo lato MF (segmento del filo della riga esterno al circolo) è uguale al raggio CM.

Per le parallele EF, MG e secante CM trovasi angolo $GMC = MCF$; per le stesse parallele e per la secante FI trovasi angolo $GMC = GMI$, onde triangolo rettangolo $GMC = GMI$, e perciò segmento $FI = MF + MI = AB$ diametro.

---

(1) Nel nostro trattato delle corde nel circolo Roma 1895, descriviamo vari trisettori mediante i quali può graduarsi esattamente il circolo in gradi e decimi di grado.

24. L'inversa, ugualmente dimostrabile, offre un modo semplice per eseguire la graduazione di un circolo C (Figura 1ª). Infatti, tracciati prolungandoli due diametri ortogonali AB, ED e determinato sul filo di una riga un segmento $FI = AB$, si costruisca nei modi geometrici arco $EH = 3°$. Si faccia passare per H il filo della riga in modo che gli estremi F, I del segmento si trovino sopra i diametri ortogonali; risulterà arco $DM = \frac{3°}{3} = 1°$ grado, arco contenuto 360 volte sulla circonferenza.

25. I goniometri in commercio, divisi in gradi e decimali di grado, non possono usarsi per la misura e costruzione degli angoli che diciamo costruibili come al (5), se tali angoli sono frazionari non terminanti per 0°,5, ovvero fratti diversi da 0°,5. *Quando vogliasi un goniometro col quale si possano misurare angoli che siano sempre ricostruibili mediante la riga ed il compasso, necessita graduarne il circolo per duennesimi dell'arco 3°;* e cioè diviso geometricamente il circolo in 120 archi uguali, si suddivide ciascuno di questi con lo stesso numero di bisettrici successive, finchè è possibile la chiara lettura della parte fratta. Data tale graduazione:

1. *Qualsiasi angolo misurato con essa ha un valore esattamente esprimibile in gradi e decimali di grado, del quale le cifre decimali sono tante quante le bisettrici in cui siasi diviso l'arco 3°.*

2. *Un angolo misurato con tale graduazione può sempre ricostruirsi mediante la riga ed il compasso senza il sussidio del quadrante.*

26. Crediamo utile richiamare all'attenzione dei geometri il principio generale geometrico sul quale si fonda la misura degli angoli.

Suppongasi (Fig. 2ª B) una serie di segmenti rettilinei *ab*, *bc*, *cd*... *gh;* perfettamente uguali ad *ab*, collegati e giranti nei loro estremi, a partire dal vertice *b* di un dato angolo *abm*. Se prolungato in *h* il lato *mb* di questo, si svolgano *n* segmenti della serie in modo che i vertici *b*, *d*, *f*... formati dagli estremi giranti si trovino sulla direzione *mh*, e che l'ennesimo segmento giaccia sopra questa direzione *mh* (Fig. 2 A), ovvero sia diretto all'estremo *a* del lato *ba* del detto angolo, come *gh* (Fig. 2ªB) sempre l'ang. *ahm* risulta ennesima parte di quello dato *abm*; talchè sia costruito geometricamente ang. *abm* = 6°, e per ipotesi siansi svolti nel detto modo sei segmenti, compreso quello *ab* formante lato del dato angolo, risulterà ang. $ahm = \frac{6°}{6} = 1°$. In egual modo sia retto l'angolo *abm* e svolti sei segmenti sarà ang. $ahm = \frac{90°}{6} = 15°$ ecc.

Infatti (Fig. 2ª B), tracciata la direzione *ha* siano svolti nel detto modo 7 segmenti della serie. I triangoli successivi *hgf*, *gfe*, *fed*... *cba*, perchè formati da segmenti uguali, sono isosceli e perciò, chiamando 1 l'ang. in *h*, per l'isoscele *fgh* sarà angolo esterno in $g = h + f = 2$. Per lo scaleno triang. *efh* sarà ang. esterno in $f = e + h = 2 + 1 = 3$; così in proseguo finchè rapporto al massimo scaleno *abh*, si trova ang. esterno in $b = a + h = 6 + 1 = 7$, ossia ang. $ahm = \frac{abm}{7}$, per essere 7 i segmenti svolti, inquantochè *per ogni segmento aggiunto l'ang.* abm *si accresce di una unità* h.

27. Se fino ad oggi ignorasi il modo di poter disporre mediante la rissa ed il compasso, una serie di segmenti uguali come alla (Fig. 2ª A, B), e perciò non si sa dividere un dato angolo in angoli uguali che siano in numero primo col suo valore, però è sempre possibile costruire delle catene

costituite di segmenti rettilinei, rigidi, perfettamente uguali e giranti due a due per i loro estremi in modo che sotto qualunque inclinazione dei segmenti successivi tra loro, resti inalterata la rispettiva lunghezza.

Istrumenti costruiti sul detto principio permetterebbero la costruzione rigorosa di qualsiasi angolo, non che la divisione di un dato angolo in n angoli uguali, qualunque sia n (1).

28. *Un angolo graficamente costruibile può decomporsi in due angoli costruibili o in due angoli non costruibili.*

Un angolo graficamente non costruibile può decomporsi in due angoli non costruibili, ovvero in uno costruibile e l'altro no. Consegue che:

Due angoli esplementari, supplementari e complementari e loro duennesimi dello stesso grado, sono ambedue costruibili ovvero ambedue non costruibili.

29. È facile dimostrare che *i tre angoli di un triangolo sono o tutti costruibili, o tutti non costruibili, ovvero uno costruibile e due no.*

CAPITOLO III.

Degli elementi triangolari

30. *In un triangolo, oltre i lati e gli angoli, esistono altri elementi sufficenti a determinarlo*: Ad esempio:

Un triangolo è costruibile se è nota la sua altezza e la lunghezza dei segmenti in cui la proiezione dal vertice divide la base.

---

(1) Nel citato trattato delle corde nel circolo descrivemmo un compasso poligonale assai semplice, mediante il quale si determina direttamente l'angolo al centro di un poligono regolare qualunque sia il numero dei suoi lati.

31. Nel piano di un triangolo ed in correlazione con esso esistono vari punti che diremo *notevoli*. Questi sono:

1. *Il centro* del triangolo. (Centro del circolo circoscritto ad esso).

2. *Incentro*. (Centro del circolo iscritto).

3. *Ortocentro*. (Intersezione comune alle perpendicolari dai vertici ai lati opposti).

4. *Baricentro* o *centro di gravità*. (Intersezione comune delle mediane dai tre vertici).

5. *Tre excentri*. (Centri dei tre circoli exiscritti al triangolo).

6. *Tre vertici del triangolo*.

7. *Tre punti medi dei suoi lati*.

8. *Tre intersezioni coi lati* delle bisettrici dai vertici opposti.

9. *Tre intersezioni coi lati dei diametri del circolo circoscritto al triangolo, tracciati dai vertici opposti*.

10. *Tre piedi delle perpendicolari dai vertici ai lati opposti*.

11. *Tre estremi nel circolo circoscritto al triangolo delle bisettrici dei suoi tre angoli*.

12. *Tre estremi nel circolo circoscritto delle corde dai vertici rispettivamente perpendicolari ai lati opposti*.

13. *Tre estremi dei diametri del circolo circoscritto, tracciati dai vertici*.

14. *Tre estremi delle corde mediane ai lati tracciate dai vertici*.

32. **I detti punti notevoli, i segmenti rettilinei che congiungono due o più punti notevoli, gli angoli che questi segmenti formano fra loro intorno ad uno dei punti notevoli, costituiscono altrettanti elementi triangolari, inquantochè variano di posizione e lunghezza col variare del triangolo.**

33. Un gruppo di due o più di detti elementi triagolari, che sia sufficiente a permettere la costruzione di un triangolo, lo diremo *gruppo determinante.*

34. Chiamando *primo* un triangolo, tutti i triangoli che abbiano per vertici tre dei suoi punti notevoli, li diremo da esso *dipendenti.*

35. Tra i punti notevoli di un triangolo *primo* e quelli dei suoi triangoli *dipendenti* esistono delle correlazioni che possono essere di grande aiuto nelle costruzioni grafiche e topografiche. Ad esempio.

L'*incentro* **di uu triangolo** *primo* **acutangolo** è **anche** *ortocentro* **del triangolo dipendente che abbia per vertici i suoi** *excentri* **nonchè del triangolo dipendente avente per vertici gli estremi delle corde bisettrici del suoi angoli.**

Il *centro* **di un triangolo è anche** *ortocentro* **del triangolo dipendente formato dalle congiungenti i punti medî dei suoi lati, ecc. ecc.**

36. In virtù delle accennate correlazioni, quando è noto un triangolo dipendente, lo è in genere anche il suo triangolo primo; e siccome ogni triangolo dipendente ha lo stesso numero di elementri del triangolo primo, e perciò lo stesso numero di *gruppi determinanti* che ne permettono la costruzione, così la geometria offre moltissimi modi sia per costruire un voluto triangolo, sia per accertare l'uguaglianza fra due triangoli.

37. Lo studio delle accennate correlazioni, che raccomandiamo a coloro i quali si dedicano alla applicazione

della geometria alle arti, non può svolgersi in questo ristretto lavoro, nel quale ci limitiamo a dimostrare alcune delle proprietà delle perpendicolari ai lati di un triangolo da taluni dei suoi punti notevoli; inquantochè, nelle esercitazioni topografiche che seguono, ci siamo avvantaggiati di tali proprietà.

38. Per comodo degli esercenti in seguito riuniamo un certo numero di gruppi determinanti triangolari costituiti di due o tre elementi lineari. L' operatore nel rilevare sul terreno un triangolo da riprodursi e del quale trovi che gli angoli non possono graficamente ricostruirsi (6) agirà prudentemente se in luogo degli angoli accessibili del triangolo, misurerà gli elementi lineari di un gruppo determinante di esso; ciò gli permetterà la ricostruzione del triangolo senza incorrere nel pericolo di possibili errori nella riproduzione di angoli d'incerta misura.

CAPITOLO IV.

Proprietà delle perpendicolari ai lati di un triangolo dai vertici di esso.

39. **Le perpendicolari ai lati di un triangolo dai loro estremi non comuni s'incontrano sulla circonferenza ad esso circoscritta.**

Infatti (Fig. 3ª A.) nel triangolo acutangolo *ahb*, si congiunga il vertice *a* con la intersezione *e* delle perpendicolari *be, he* agli estremi dei lati *ab, ah*. I triangoli rettangoli *ahe, abe,* sono inscrittibili nella circonferenza descritta col raggio *ce* dal punto medio *c* della ipote-

nusa *ae*, quale circonferenza passando per i punt *a*, *h*, *b*, vertici del triangolo *ahb* è anche ad esso circoscritta.

Dimostrasi egualmente per le intersezioni *f g*, delle perpendicolari dagli estremi delle altre due coppie dei lati.

Nel triangolo ottusangolo *fhe* i triangoli rettangoli *afe*, *ahe* sono inscrittibili nella circonferenza descritta con la ipotenusa comune *ae* come diametro, la quale passando per i vertici *f*, *h*, *e*; è quella circoscritta al triangolo.

Dimostrasi ugualmente per le intersezioni *b*, *g* delle perpendicolari agli estremi dei lati delle altre due coppie di essi.

40. **Le perpendicolari ai lati nel vertice di un angolo del triangolo fanno fra loro un angolo supplementare ad esso, e perciò uguale alla somma degli altri due angoli del triangolo.**

(Fig. 3ª A.). Infatti siano *he*, *hf* perpendicolari ai lati *ha*, *hb* nel vertice *h* del tringolo acutangolo *ahb*. Avremo: Ang. $ahe + bhf - ahb = 180° - ahb =$ Ang. $a + b$; e nel triangolo ottusangolo *fhe* avremo $ahe + bhf - fhe = 180° - fhe =$ Ang. $f + e$.

41. **Le perpendicolari nel vertice di un angolo del triangolo ai lati che lo formano, fanno con questi lati angoli uguali.**

Infatti come retti Ang. $eha = fhb$, ed anche $eha - ahb = fhb - ahb$ ossia Ang. $ehb = ahf$.

Consegue che *in un triangolo la somma dei tre angoli è costituita del doppio, di uno qualunque di essi e del doppio suo complemento: e che la somma di due qualunque degli angoli del triangolo é uguale al terzo più o meno due volte il complemento di questo.* Si adotta

il segno positivo quando il terzo angolo è acuto, e negativo se esso è ottuso.

42. In un triagolo *ahb* (Fig. 3ª B.) girando il perimetro a partire da un vertice *b* in un senso determinato *bha*, diremo *bh* lato primo, *h* vertice primo; *ha* lato secondo, *a* vertice secondo, ecc.

Dal vertice primo *h* elevato al lato primo la perpendicolare *hf* ed abbassata al lato terzo la perpendicolare *hp*, dei tre angoli *bhp*, *pha*, *ahf*, dei quali la somma è 90°, diremo per brevità *derivato* il primo, *integrante* il secondo, *complemento* il terzo, esprimendoli con i segni D_h I_h C_h ove *h* è la lettera del vertice comune.

Così dal vertice secondo *a*, elevata la perpendicolare *ag* al lato secondo, ed abbassata la perpendicolare *ar* al lato primo sarà angolo *har* = D_a » angolo *rab* = I_a « angolo *bag* C_a » essendo *a* la lettera del vertice secondo ecc.

Chiameremo anche *derivati* diretti di un vertice *h* i due angoli D_h I_h considerati in complesso.

43. **In un triangolo gli elementi D, I, C, di un vertice qualunque concorrono permutandosi alla formazione degli altri due vertici del triangolo.**

Infatti (Fig. 3ª B) nel triangolo acutangolo *ahb*, ed in elementi del vertice *h*, per essere retto l'ang. *bhf*, e rettangolo il triangolo *bph*, avremo angolo *abh* = *phf*, essendo ambedue complementari dell'angolo *bhp* = D_h; ma angolo *phf* = $I_h + C_h$ e perciò ang. *abh* = $I_h + C_h$. Egualmente per essere ambo complementari dell'ang. *pha* = I_h sarà ang. *hab* = *phe*; ma *phe* = $D_h + C_h$ quindi

ang. $hab = D_h + C_h$; talchè nel triangolo acutangolo *ahb* ed in elementi del vertice *h* trovasi ang. $h = D_h + I_h$ » Angolo $a = D_h + C_h$ » Ang. $b = I_h + C_h$.

Si dimostrerebbe in modo analogo la formazione dei 3 angoli in elementi del vertice *a*, o del vertice *b*.

Nel triangolo ottusangolo *fhe* di complemento negativo $ahf = bhe$ ed in elementi del vertice *h*, per essere retto l'ang. *ahe*, e rettangolo il triangolo *ep'h* avremo angolo $feh = pha$; ma $pha = I_h - C_h$ e perciò ang. $feh = I_h - C_h$. Egualmente per essere ambo complementari dell'angolo $fhp =$ sarà ang. $hfe = phb$; ma $phb = D_h - C_h$ quindi ang. $hfe = D_h - C_h$; talchè in elementi del vertice ottuso *h* del triangolo *fhe* trovasi ang. $h = D_h + I_h$ « ang. $f = D_h - C_h$ » ang. $e = I_h - C_h$.

Si dimostrerebbe in modo analogo la formazione dei tre angoli del triangolo in ele nenti del vertice *f* ovvero *e*.

44. Dal precedente conseguono le seguenti equazioni che sarà facile dimostrare ai nostri lettori.

1. Nel triangolo acutangolo *ahb* avremo $D_h + I_h + C_h = D_a + I_a + C_a = D_b + I_b + C_b = D_h + D_a + D_b = I_h + I_a + I_b = C_h + C_a + C_b = 90°$.

Nel triangolo ottusangolo *fhe* avremo $D_h + I_h - C_h = I_f + C_f - D_f = D_e + C_e - I_e = D_h + D_e - D_f = I_h + I_f - I_e - = C_h + C_e - C_h = 90°$,

45 **Il diametro del circolo circoscritto al triangolo, tracciato da un suo vertice, inverte i derivati di quel vertice.**

Infatti (Fig. 3ª B) nel triangolo acutangolo *ahb*, i triangoli rettangoli *hag, hpb* hanno l'angolo acuto *agh*

= *abh* come misurati dallo stesso arco, e perciò angolo *ahg* = *bhp'* = D_h e conseguentemente ang. *ghb* = *ahp* = I_h.

Dimostrasi in egual modo, tracciati i diametri, per gli altri due vertici.

Nel triangolo ottusangolo *fhe*, tracciata la corda *fg* i triangoli rettangoli *hfg*, *hp'e* hanno l'angolo acuto *fgh* = *feh* come misurati dallo stesso arco, e perciò angolo *fhg* = *ehp'* = D_h e conseguentemente angolo *ghe* = *fhp'* = I_h.

Tracciati i diametri si dimostra egualmente per gli altri due vertici.

46. **Le rette che tracciate dagli estremi non comuni dei lati dell'angolo di un triangolo, formano rispettivamente con essi angoli complementari di quello, s'incontrano nel** l'*ortocentro*.

Infatti (Fig. 3ª B) nel triangolo acutangolo *ahb* sia angolo *hbm* = *hao* = C_h. Il triangolo *hbm* è rettangolo per avere complementari gli angoli in *h* e *b*, ossia la *bm* è perpendicolare dal vertice *b* al lato opposto *ah* del triangolo *ahb*. Il triangolo *hra* è rettangolo per avere complementari gli angoli in *h* ed in *a*, ossia la *ar* è perpendicolare dal vertice *a* al lato opposto *bh* del triangolo *ahb* ; quindi le *hm*, *ar* rispettivamente perpendicolari dai vertici ai lati opposti s'incontrano nell'ortocentro *o* del triangolo *ahb*. Dimostrasi analogamente per le rette formanti coi lati degli altri due angoli *a*, *b* angoli complementari ad essi.

Nell'ottusangolo *fhe*, agli estremi *f*, *h* dei lati di un suo angolo *e*, sia angolo *eft* = *ahp* = C_e. Il triangolo *etf* è rettangolo per avere in *e* ed *f* angoli complementari ; ed il triangolo *ep'h* è rettangolo per avere in *e* ed *h* an-

goli complementari, quindi nel triangolo *fhe* le *ft*, *hp'* cadono perpendicolari dai vertici sui lati opposti rispettivi e perciò esse s'incontrano nell'ortocentro *o'* del triangolo.

Dimostrasi analogamente per le rette formanti coi lati degli altri due angoli *h*, *f* e dai loro estremi, angoli rispettivamente complementari ad essi.

Consegue: « 1° *Che le perpendicolari abbassate da due* « *vertici di un triangolo ai rispettivi lati opposti formano con questi lati nei detti vertici angoli complementari al terzo angolo del triangolo.* »

« 2° *In un triangolo iscritto, le corde tracciate perpendicolarmente dà due vertici ai lati opposti, determinano sulla circonferenza archi uguali dalle due parti del terzo vertice.* »

47. **Nel triangolo acutangolo iscritto** *ahb* (Fig. 3ª B) **l'ortocentro** *o* **è anche incentro del triangolo dipendente** *nxq* **formato dalle congiungenti due a due gli estremi delle corde tracciate perpendicolarmente dai vertici ai lati opposti nel triangolo primo.**

Infatti essendo arco $bn = bq$ » $hx = hq$ » $ax = an$ le corde *xb*, *nh*, *qa*, nel triangolo *nxq* risultano bisettrici dei suoi angoli *n*, *x*, *q*, quindi il loro incontro *o*, *è incentro* di questo triangolo.

Ciò non accade nel triangolo rettangolo ovvero ottusangolo, poichè nel primo l'ortocentro coincide col vertice del suo angolo retto e perciò trovasi sulla circonferenza circoscritta al triangolo; nel secondo l'ortocentro cade fuori del circolo circoscritto al triangolo; mentre in ambedue i casi l'incentro è dentro l'area del triangolo e perciò dentro quella del circolo ad esso circoscritto.

Tale diversa proprietà può dimostrarsi mediante i

derivati triangolari. Infatti (43) il valore dei tre angoli dell'acutangolo *ahb* in elementi di un suo vertice *h*, sono: Angolo $f = D_h + I_h$ » Ang. $a = D_h + C_h$ » Ang. $b = I_h + C_h$ e sommando Ang. $h + a + b = 2 (D_h + I_h + C_h) = 180°$; ma il triangolo essendo iscritto, i suoi angoli abbracciano sulla circonferenza archi doppi, e perciò la somma degli archi abbracciati dal doppio valore degli angoli del triangolo è evidentemente $2 \times 180° = 360°$ circonferenza; formula che dice come in elementi di un vertice di un triangolo acutangolo iscritto, esiste un secondo triangolo acutangolo iscritto nello stesso circolo del quale ciascun angolo è formato di un doppio elemento del primo.

Tale proprietà non si verifica per il triangolo ottusangolo *fhe*. Infatti come al (43) il valore dei suoi angoli in elementi del vertice ottuso *h* è ang. $h = D_h + I_h$ » angolo $f = D_h - C_h$ » ang. $e = I_h - C_h$ e sommando angoli $h + f + e = 2 (I_h + I_h - C_h) = 180°$ ossia $2 (D_h + I_h) = 180° + 2C_h$ e per essere gli angoli iscritti maggiori della circonferenza di $4 C_h$ perciò in elementi di un vertice ottuso *h* non può costruirsi un secondo triangolo iscrittibile nello stesso circolo.

48. **Nel triangolo iscritto e sulle direzioni delle corde perpendicolari dai vertici ai lati opposti, ciascun lato è equidistante dalla circonferenza e dall'ortocentro.**

Infatti (Fig. 3ª C) nell'acutangolo *ab* per il già detto essendo arco $bn = bq$ sarà ang. $ban = baq$, ma *on* è perpendicolare ad *ab*, quindi il triangolo *nao* è isoscele ossia segmento $pn = po$. Dimostrasi in egual modo che segmento $rq = ro$, e segmento $mx = mo$.

Nell'ottusangolo *fhe*, tracciata idealmente la *fq* poichè

per il già detto arco $hx = hq$ anche angolo $hfo' = hfq$, ma la qo' è perpendicolare alla fh, quindi il triangolo qfo' è isocele e segmento $lq = lo'$. Poichè l'ang. heo, formato dalla corda he, e dalla secante $o'q$, è misurato dalle semisomma degli archi $he + eq = hx$, così tracciata idealmente la ex, sarà angolo $xeh = heo'$; ma eh è perpendicolare alla fo' quindi il triangolo xeo' è isoscele e segmento $tx = to'$. Le parallele xh, he « hn, eb danno arco $hx = eb$ » $he = nb$, e perciò arco $xe = en$; tracciata idealmente la fn, sarà angolo $efo' = efn$, ed essendo $o'n$ perpendicolare alla fe il triangolo nfo' è isoscele, quindi segmento $p'n = p'o'$.

49. Sarà facile dimostrare i seguenti:

In un triangolo iscritto, la congiungente due a due i punti d'incontro con la circonferenza delle perpendicolari elevate ai lati in un vertice, con quelle elevate negli estremi del lato opposto ad esso, è uguale a questo lato.

Così (Fig. 3ªc) nel triangolo acutangolo ahb, tracciate le dette congiungenti, avremo $ef = ab$ « $fg = bh$ » $ge = ha$ ossia triangolo $efg = ahb$; e per l'ottusangolo fhe avremo $ab = ef$ « $bg = hf$ » $ga = he$ ossia triangolo $fhe = agb$.

50. **Nel triangolo iscritto la congiungente gli estremi del diametro e della corda perpendicolare tracciata da un vertice al lato opposto è parallela a questo lato.**

Così (Fig. 3ªA). Nel triangolo iscritto ahb tracciate dai vertici i diametri e le corde perpendicolari ai lati opposti e congiunti gli estremi di ciascuna coppia di questi, avremo gn parallela ad ab, ge parallela a bh, xf

parallela *ha;* e nell'ottusangolo *fhb* avremo corda *gn* parallela *fe*, *xb* parallela *eh*, *aq* parallela *hf*.

51. (Fig. 3ªD) Fra i triangoli dipendenti che hanno per base uno dei lati di un triangolo primo iscritto e per vertice l'ortocentro di questo ed altri triangoli dipendenti iscritti nello stesso circolo, si verificano le seguenti uguaglianze.

Per il triangolo iscritto *ahb* avremo: Triang. *aob* = *fhe* = *bga* = *anb*. « Triangolo *boh* = *heb* = *bqh* = *gaf*. Triangolo *hoa* = *afh* = *hxa* = *gbe*.

Per il triangolo ottusangolo *fhe* avremo: Triangolo *fo'e* = *ahb* = *eqf* = *enf*. « Triangolo *fo'h* = *fah* = *aho* = *gbe* ». Triangolo *eo'h* = *ehb* = *hob* = *fag*.

52. **Due triangoli aventi la stessa base ed i vertici volti nello stesso senso, e dei quali i lati dell'uno siano perpendicolari a quelli dell'altro, il vertice dell'uno è ortocentro dell'altro.**

Così (Fig. 3ªB) nei triangoli *aob*, *ahb* il vertice *o* del primo *è* ortocentro del secondo, ed il vertice *h* di questo è ortocentro del primo; ugualmente nei triangoli *boh*, *bah* il vertice *o* del primo è ortocentro del secondo e quello *a* del secondo è ortocentro del primo. Lo stesso avviene nei triangoli *hoa*, *hba*.

53. (Fig. 3ªB) L'altezza *hp* di un triangolo *ahb* del quale sia noto un lato *ab* e la proiezione su questo del vertice opposto è data dalla formula $\frac{ap \times bp}{pn} = \frac{ap \times pb}{p''q}$

$= \frac{ap \times bp}{po} = \frac{fp' \times p'e}{hp'}$. In egual modo l'altezza ar rapporto al lato bh sarà $ar = \frac{br \times rh}{rq} = \frac{br \times rh}{ro}$ ecc.

54. L'area di un triangolo ahb, (Fig. 3ªB), è data dalla formula $\frac{ap + bp}{2} \times \frac{ap \times bp}{pn} = \frac{ap + pb}{2} \times \frac{ap \times pb}{po}$ $\ldots = \frac{br + rh}{2} \times \frac{br \times rh}{rq} = \frac{br + vh}{2} \times \frac{bv \times vh}{ro}$ ecc.

55. (Fig. 3ªD) **I triangoli dipendenti** pam, mhr, rbp **aventi per vertice uno di quelli del triangolo primo** ahb, **e per base una delle congiungenti due a due i piedi delle perpendicolari abbassate dai vertici ai lati opposti di esso, sono fra loro simili ed anche simili al triangolo primo** ahb.

Infatti, i triangoli rettangoli bra, bph sono simili per avere comune l'angolo b quindi $ab : br :: bh : bp :: ha : pr$. Dimostrasi ugualmente per i triangoli map, mhr entrambi simili a quello ahb.

56. **Le perpendicolari dai vertici ai lati di un triangolo primo sono bisettrici del triangolo dipendente avente per lati le congiungenti due a due i piedi delle perpendicolari stesse.**

Infatti (Fig. 3ªc) sia il triangolo pmr dipendente dell'acutangolo primo iscritto ahb. Sappiamo dal (47) che nel triangolo nxq le perpendicolari ar, hp, bn ai lati del triangolo ahb, sono bisettrici ai vertici del triangolo nxq: pertanto come dal (48) segmento $pn = po$ « $rq = ro$ » $mx = mo$, quindi i triangoli nxq, pmr hanno i lati ri-

spettivamente paralleli ed i vertici sulle stesse direzioni bisettrici degli angoli del primo che perciò sono anche bisettrici degli angoli del secondo. Sia triangolo *ptl* dipendente del primo ottusangolo *fhe*. Poichè, come dal triangolo *fo'e* = *ahb*, sarà anche triangolo *p'tl* = *pmr*, e le perpendicolari dai vertici ai lati *o'p'*, *fl*, *et* comuni per i triangoli *fhe*, *fo'e*, saranno per il già detto bisettrici degli angoli del triangolo dipendente *p'tl*.

57. (Fig. 3ªD) Nel triangolo *ahb*, si congiungano con la *mr*, i piedi delle perpendicolari abbassate dagli estremi del lato *ab* sugli altri due lati; **nel quadrilatero** *abrm* **così formato, il rettangolo delle diagonali è uguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti.**

Infatti, i triangoli *amb*, *arb* sono rettangoli e perciò iscrittibili nel circolo di diametro *ab*, quindi (Teorema di Tolomeo) $ar \times bm = (ab \times mr) + (am \times br)$, e per l'identica ragione $hp \times bm = (bh \times pm) + (bp \times hm)$ e $ph \times ar = (ah \times pr) + (ap \times hr)$. Per il triangolo ottusangolo *fhe* l'uguaglianza dei triangoli *fo'e*, *ahb* dà quadrilatero *felt* = *abrm* « *otp'e* = *hmpb* » *o'fp'l* = *hapr* e perciò quanto si è detto per i secondi si applica ai primi.

58. In un triangolo abbassate le perpendicolari dai vertici ai lati:

1. **Per ogni coppia dei lati formanti un vertice del triangolo il prodotto della somma per la differenza dei lati è uguale al prodotto della somma per la differenza delle loro proiezioni sul terzo lato.**

2. **La differenza dei quadrati dei detti due lati è uguale alla differenza dei quadrati delle loro proiezioni sul terzo.**

Infatti (Fig. 4ª) per la coppia dei lati *ca eb* formanti il vertice *c* del triangolo *acb*, si abbassi la perpendicolare al terzo lato, e dal vertice col lato minore *cb* come raggio si descriva la circonferenza, che tagli in *h* il lato *ab*, ed in *m, n* il lato *ac* prolungato.

Come raggi dello stesso circolo risultano $cb = ch = cm = cn$ ed inoltre segmento $pb = ph$. Le secanti *an*, *ab* del circolo *c* tracciate dallo stesso punto *a*, danno $am \times an = ab \times ah$, e sostituendo *cb* alle *cm*, *cn*, e *ph* alla *pb* sarà $(ac + cb) \times (ac - cb) = (ap + pb) \times (ap - pb)$.

Per un noto principio sappiamo che « il prodotto della somma per la differenza di due quantità, è uguale alla differenza dei loro quadrati, » quindi $(ac + cb) \times (ac - cb) = \overline{ac}^2 - \overline{cb}^2$; inoltre $(ac + cb) \times (ac - cb) = (ap + pb) \times (ap - pb)$, quindi $\overline{ac}^2 - \overline{cb}^2 = \overline{ap}^2 - \overline{pb}^2$.

Si osservi che nel triangolo isoscele *hcb* per essere $ch = cb$ e $ph = pb$, sarà $(ch + cb) \times (ch - cb) = ph + pb \times ph - pb = 0$. Ossia delle tre coppie di lati del triangolo isoscele, una dà differenza zero e le altre due danno uguale differenza.

59. **In un triangolo scaleno la differenza tra i quadrati del lato massimo e minimo, è uguale alla somma delle differenze dei quadrati delle altre due coppie di lati nel triangolo: talchè se a** $a > b > c$ **sono lati di uno scaleno sarà** $a^2 - c^2 = a^2 - b^2 + b^2 - c^2$ (A).

Infatti, se nella equazione (A), si sopprimono nel secondo membro le quantità uguali di segno contrario

$+ - b^2$, si riduce alla identità $a^2 - c^2 = a^2 - c^2$. Consegue che:

In un triangolo scaleno il prodotto della somma per la differenza tra il lato massimo ed il minimo, è uguale alla somma dei prodotti, tra somma e differenza delle altre due coppie di lati.

60. Nella equazione (A) è facile vedere che le quantità $\sqrt{a^2-c^2} \ll \sqrt{a^2-b^2} \gg \sqrt{b^2-c^2}$ sono lati di un triangolo rettangolo del quale il segmento $\sqrt{a^2-c^2}$ è ipotenusa. Per brevità, tale triangolo rettangolo diremo *differenziale* rapporto al triangolo che lo ha generato. Il triangolo isocele non ha triangolo differenziale, o per meglio dire, il triangolo rettangolo differenziale di un isoscele, avendo un cateto uguale alla ipotenusa e l'altro cateto nullo, si cangia in un segmento uguale alla ipotenusa.

61. (Fig. 5ª) Siano $ca > cb$ lati di un angolo c del triangolo acb. Dal vertice c coi lati, come raggi si descrivano le circonferenze. Dall'estremo del lato maggiore si tracci la tangente ap al circolo minore, e nell'estremo del lato minore si elevi la perpendicolare bo semicorda ossia ordinata del circolo maggiore, ad incontrarne la circonferenza. Evidentemente $ap = bo$ come semicorde tangenti al circolo minore. Nel triangolo rettangolo apc trovasi $(\overline{ap}^2 = \overline{bo}^2) = \overline{ca}^2 - \overline{cp}^2 = \overline{ca}^2 - \overline{cb}^2$; ed anche $(\overline{ap}^2 = \overline{bo}^2) = \sqrt{\overline{ac}^2 - \overline{cb}^2} = \sqrt{(ac+cb)\times(ac-cb)}$.

Consegue, che rispetto alla coppia dei lati ca, cb del triangolo acb, la tangente $ap = bo = \sqrt{\overline{ac}^2 - \overline{cb}^2}$ è il lato corrispondente alla coppia stessa nel triangolo rettangolo differenziale di quello dato acb.

62. (Fig. 5ª) **Date due circonferenze concentriche di raggi disuguali** *ca*, *cb*, **le distanze prese sulla stessa direzione da qualunque punto della circonferenza maggiore ai due incontri della direzione con la minore, e dà qualunque punto della circonferenza minore ai due incontri della direzione con la maggiore, dànno uguale prodotto.**

Infatti, nel circolo maggiore, si tracci per il punto *b*, la corda *fg*. Dà noti teoremi sappiamo come le corde *fg*, *oh*, per essere $bo = bh$, danno $bf \times bg = bo \times bh = \overline{bo}^2$.

Nel circolo di raggio *cb* nel quale *ap* è tangente *an* secante abbiamo $an \times am = \overline{ap}^2$, ed essendo $\overline{ap}^2 = \overline{60}^2$, sarà $bf \times bg = am \times an = \overline{ap}^2 = \overline{bo}^2$.

63. È facile vedere che la tangente $= ap \sqrt{\overline{ac}^2 - \overline{cb}^2} = \sqrt{(ac + cb) \times (ac - cb)}$ è costante qualunque sia l'inclinazione scambievole ossia l'angolo che formano i lati *ca*, *cb*; talchè per due triangoli *acb*, *acr* che abbiano due lati rispettivamente uguali, nei corrispondenti triangoli rettangoli differenziali il lato *ap* è comune, ma poichè **in un triangolo differenziale l'ipotenusa è radice quadra della differenza dei quadrati dei lati massimo e minimo,** così nel triangolo differenziale la tangente lato *ap* sarà ipotenusa, finchè nel dato triangolo i lati della coppia da cui proviene siano il massimo e minimo; e la stessa tangente *ap* nel triangolo differenziale diverrà cateto, sè uno dei lati della coppia fosse medio tra quelli del dato triangolo. Così, ad esempio, nel triangolo *acb* sia il lato *ac* massimo e *cb* minimo e la tangente *ap* sarà ipotenusa nel corrispondente triangolo differenziale; invece nel triangolo *acr* sia lato *ac* massimo e *cr* medio allora la tangente *ap* sarà cateto del corrispondente triangalo differenziale.

64. Consegue dall'esposto che:

1. A triangoli disuguali corrispondono triangoli rettangoli differenziali disuguali;

2. Due o più triangoli aventi triangoli differenziali uguali sono fra loro uguali;

3. A triangoli differenziali aventi un lato uguale corrispondono dei triangoli aventi due lati scambievolmente uguali;

4. A segmenti rettilinei uguali dati come triangoli rettangoli differenziali i triangoli isoceli corrispondenti sono fra loro uguali;

5. A segmenti disuguali dati come triangoli rettangoli differenziali corrispondono triangoli isoceli disuguali;

6. Due triangoli equiangoli e perciò simili hanno triangoli differenziali simili, ecc. ecc.

La ristrettezza impostaci non ci permette di fare emergere l'utilità pratica che in taluni casi possa ricavarsi dalle proprietà speciali ai triangoli differenziali.

65. (Fig. 6ª) Rispetto ad una coppia di lati *ca*, *cb* di un triangolo *acb*, diremo per brevità *differenziale* la tangente *ap*; *quadrato differenziale* il quadrato della tangente *ap*; *circolo differenziale* quello descritto con la tangente *ap* come raggio.

Poichè sono tre le coppie dei lati di un triangolo, così esso ha *3 differenziali, 3 quadrati differenziali* e *3 circoli differenziali.*

Il triangolo differenziale essendo rettangolo, consegue che il quadrato differenziale dei lati massimo e minimo, è

uguale alla somma dei quadrati differenziali delle altre due coppie di lati del dato triangolo, e perciò l'area del circolo differenziale ed in genere di tutte le figure costruite sulla differenziale della coppia dei lati massimo e minimo, sono somma delle aree dei circoli differenziali e delle figure simili costruite sulle differenziali delle altre due coppie di lati; conseguentemente l'area del quadrato circolo o figura costruita sulla differenziale di una coppia di lati che non siano massimo e minimo è differenza fra le aree delle figure simili costruite sulle differenziali delle altre due coppie.

66. (Fig. 6ª) Sia *ap* differenziale dei lati *ca*, *cb* dello scaleno *acb*. Per il vertice *a* si traccino quante vogliansi secanti *an, ad, ab* . . . al circolo minore di raggio *cb*: e nelle loro intersezioni con esso, i raggi *cd, cb, cr* . . . I triangoli *acd, acb, aco* . . . hanno una coppia di lati uguali e rapporto ad essi la stessa differenziale *ap*. Tracciate da un punto qualunque *z* della circonferenza maggiore quante vogliansi secanti *zq, zr* . . . a quella minore, nonchè i raggi *cq*, *cx* . . . si otterrà egualmente un numero infinito di triangoli aventi una coppia di lati uguali a quelli *ca*, *cb*, e perciò la stessa differenziale *ap*. Dal vertice comune *v* di essi alle rispettive basi si abbassino le perpendicolari *ch, ch', ck* . . : Ciò posto, per il già detto avremo $\overline{ac}^2 - \overline{cd}^2 = \overline{ca}^2 - \overline{co}^2 = (ac + cd) \times (ac - cd) = (ca + co) \times (ca - co) = \overline{h'a}^2 - \overline{h'd}^2 - \ldots$ ecc. ecc. **Talchè, date due circonferenze concentriche di diverso raggio** *ca, cb*, **e che dà un punto qualunque** *a* **della maggiore si tracci una secante alla minore, la quale passi per il centro comune** *e*, **ed altre secanti esterne al centro come** *ab*; **i raggi** *ca, cb* **delle due circonferenze possono considerarsi come lati di altrettanti**

triangoli aventi per base ciascuno una delle secanti esterne al centro *ab*; dei quali triangoli la tangente *ap*, tracciata da un punto qualunque della circonferenza maggiore alla minore, è differenziale comune.

67. Fra i triangoli aventi per lati i raggi *ca*, *cb* di due circonferenze concentriche, quello piatto *acn* ha la base maggiore, ossia la secante *an* la quale è somma dei lati o raggi *ca*, *cn*; e quello di base minore è il triangolo ripiegato *acm* del quale la base è la parte *am* differenza fra i due lati del triangolo.

68. La circonferenza descritta sul raggio o lato maggiore *ca* come diametro, divide per metà nei punti *c*, *h*, *h'*, *h''* . . . i segmenti delle secanti tracciate dal punto *a* e racchiusi nella circonferenza minore, e perciò i segmenti *am*, *ao*, . . . *ap* delle stesse secanti, compresi fra le due circonferenze concentriche, danno su ciascuna di esse la differenza fra i segmenti *ac*, *cn* « *ah*, *hb* . . . nei quali la circonferenza di diametro *ca* divide il fascio delle secanti tracciate per *a*; e degli stessi segmenti il minore *am* è differenza dei raggi, ossia lati dei vari triangoli aventi per base le secanti da *a* alla circonferenza minore, e quello maggiore *ap*, ossia tangente differenziale comune, è radice quadra della differenza dei quadrati dei raggi ovvero lati dei detti triangoli.

69. **I triangoli aventi la stessa base e la stessa proiezione dei lati su di essa hanno uguale prodotto della somma per la differenza dei lati, e conseguentemente la stessa differenza dei quadrati dei lati.**

Infatti (Fig. 7ª) nel triangolo *acb* si tracci indefinita dal vertice alla base la direzione perpendicolare *hd*, e si congiunga un punto qualunque *d* della perpendicolare con gli estremi *a*, *b* della base; tutti i triangoli come *adb* che hanno il vertice sulla direzione perpendicolare *hd* al di sopra o al di sotto della base *ab* all' infinito, hanno le stesse proiezioni dei lati *ha*, *hb*. Sia *ap* la tangente al circolo descritto col lato minore *cb* del triangolo *acb*. In virtù di quanto precede, avremo $(da + db) \times (da - db) = (ca + cb \times (ca - cb) = (ha + hb) \times (ha - hb) = \overline{da}^2 - \overline{db}^2 = \overline{ca}^2 - \overline{cb}^2 = \overline{ha}^2 - \overline{hb}^2 \ldots = \overline{ap}^2$.

70. Diremo per brevità *serie triangolare differenziale* una serie di triangoli che come alla (Fig. 7ª) abbiano per base comune una tangente *ap*, ovvero una secante del fascio tracciato da un punto *a* esterno ad un circolo di raggio arbitrario *cb* ed anche una delle parti interna od esterna al circolo delle dette secanti, e che abbiano ciascuno il vertice sopra la direzione perpendicolare alla rispettiva base e passante per il centro *c* del circolo *cb*. Così, rapporto al circolo di raggio *cb* i triangoli *acp*, *acb*, *acr*, *adb*, *ask* . . ., non che tutti i triangoli che come *acr* hanno la stessa base *ar* ed il vertice sulla direzione perpendicolare ad essa per il vertice *d* di uno dei triangoli suddetti e per il centro *c* del circolo alla base comune, costituiscono la stessa serie differenziale, inquantochè essi hanno la tangente *ap* come differenziale comune dei quadrati dei rispettivi lati.

Una *serie triangolare differenziale* si suddivide nelle sotto serie *rettangola*, *acutangola* e *mista*.

Una sotto serie rettangola è costituita da una colonna di triangoli i quali come *acp*, *afp* hanno per base la tangente *ap* ad un circolo di raggio qualunque ed uno dei cateti sulla perpendicolare indefinita *pf* all'estremo *p* della tangente o differenziale *ap*.

Le sotto serie acutangole hanno per base comune di una colonna di triangoli la parte esterna *ar*, *ao* delle secanti tracciate ad un circolo *c* da un punto *a* esterno ad esso. I triangoli *acr*, *adr* appartengono ad una colonna della sotto serie differenziale acutangola *ap*.

Le sotto serie miste hanno per base una secante intera dallo stesso punto esterno *a* ad un circolo *c*. La serie mista si compone di colonne di triangoli ottusangoli ed acutangoli: i triangoli *aeb*, *adb* appartengono ad una colonna di serie mista.

È superfluo osservare per la stessa colonna di triangoli e rapporto agli angoli opposti alla base comune assunti come vertici, che una sotto serie rettangola non può contenere triangoli di vertici ottusi e acuti. La sotto serie acutangola non può contenere triangoli di vertice retto, ovvero ottuso, e le sotto serie mista contiene per ogni colonna due soli triangoli rettangoli scambievolmente uguali e simmetrici rapporto alla base comune.

71. **Dato un circolo differenziale di raggio** *ap* (Fig. 7ª) **nel piano che lo contiene possono costruirsi quanti vogliansi triangoli aventi lo stesso** *quadrato differenziale* **dei lati purchè le rispettive basi** *ab*, *ae* **ecc. siano tutte radianti dal suo centro** *a*, **ed i loro vertici in un punto esterno all'area del circolo differenziale dato.**

Si tracci infatti la tangente indefinita *pf* ad un estremo di un raggio differenziale *ap*, e ad incontrare la tangente

pf, si traccino quante vogliansi direzioni *ac*, *af* radianti da *a*. I triangoli rettangoli *apc*, *apf*, aventi per base un raggio qualunque della *circonferenza differenziale*, hanno rapporto ai rispettivi lati lo stesso *quadrato differenziale*. Rapporto a quel circolo differenziale, le infinite colonne di tali triangoli costituiscono la sotto serie rettangola che diremo prima. Sia dato un segmento *ab* radiante dal centro del circolo differenziale e vogliasi costruire una colonna di triangoli aventi la stessa base sulla data direzione *ab* e lo stesso quadrato differenziale dei lati della suddetta serie prima e cioè $\overline{ap}^2$; e sia assegnato il punto *c*, esterno al circolo differenziale come vertice di uno dei triangoli della colonna; allora tracciata la tangente *cp* al circolo differenziale, con questa come raggio si descriva la circonferenza e si congiunga il centro *c* di questa con quello *a* del circolo differenziale e con le intersezioni *r*, *b* del circolo *c* con la data direzione *ab*. Per essere *ap* tangente al circolo di centro *c*, i triangoli *acr*, *acb* hanno $\overline{ap}^2$ come differenziale dei lati ed appartengono alla richiesta colonna di triangoli. Dal vertice comune *c* di essi si tracci indefinita alla base *ab* ovvero *ar*, la perpendicolare *hcd*, e congiunto un punto qualunque *d* di questa con i punti *a*, *r*, *b*, i triangoli *adb*, *adr*, avendo le stesse proiezioni dei lati dei triangoli *acb*, *acr* hanno lo stesso quadrato differenziale $\overline{ap}^2$ ed appartengono ai richiesti, come tutti quelli che possono costruirsi all' infinito dalle due parti della base comune *ab* e col vertice sulla perpendicolare ad essa *hd*. Per quanto dicemmo, qualunque secante per *a* al circolo di raggio *cb*, può essere base comune di una colonna di triangoli dei quali il vertice sia sopra una perpendicolare indefinita ad essa passante per il centro *c*, e che hanno lo stesso quadrato differenziale dei lati $\overline{ap}^2$,

Tutte le colonne di triangoli di sotto serie mista o di sotto serie acutangola nel detto modo costruite formano la serie seconda *ap* in rapporto con la suddetta serie prima rettangola.

Con lato minore *db* o *dr* di un triangolo qualunque *adb*, ovvero *adr* della serie seconda e dal vertice *d*, si descriva una circonferenza e si traccino ad essa per *a* quante vogliansi secanti. Ognuna di tali secanti o la sua parte esterna può essere base comune ad una colonna di triangoli acutangola o mista dei quali triangoli il quadrato differenziale è quello della serie prima $\overline{ap}^2$.

Infatti, sia *ae* una delle secanti per *a* al circolo di raggio *db*, si elevi ad essa la direzione perpendicolare indefinita passante per il centro *d*, e si congiungano quanti vogliansi punti *s*, *g* della perpendicolare col centro *a* del circolo differenziale, e con le intersezioni *n*, *e*. Avremo $\overline{ga}^2 - \overline{ge}^2 = \overline{sa}^2 - \overline{sn}^2 = \overline{ad}^2 - \overline{de}^2$. ma poichè $de = db$, come raggi dello stesso circolo sarà $\overline{ga}^2 - \overline{ge}^2 = \overline{sa}^2 - \overline{sn}^2 = \overline{ad}^2 - \overline{de}^2 = \overline{ad}^2 - \overline{db}^2 = \overline{ap}^2$.

Si dimostrerebbe in egual modo per la colonna di serie acutangola, cioè $\overline{ga}^2 - \overline{gi}^2 = \overline{sa}^2 - \overline{so}^2 = \overline{da}^2 - \overline{dr}^2 = \overline{ap}^2$.

Rapporto al circolo di raggio *db* tutte le colonne di triangoli che hanno per base comune una delle secanti per *a*, o la parte esterna al circolo di questa, costituiscono la serie terza *ap*, in referenza alla serie prima rettangola.

In egual modo col lato minore *se* di uno qualunque dei triangoli di serie terza e col centro nel suo vertice *s* descritta la circonferenza e tracciata a questa per *a* un fascio di secanti; tutte le colonne di triangoli che abbiano una di queste secanti o la sua parte esterna al circolo, come base comune, ed il vertice sulla perpen-

dicolare abbassata alla base comune per il centro *s* del circolo della serie, formano la serie quarta $\overline{ap}^2$, in referenza alla prima rettangola, e così si procede di serie in serie all'infinito.

Consegue da ció che qualunque punto del piano di un circolo differenziale, purchè esterno alla sua area, può essere vertice di un triangolo che abbia per base un segmento radiante dal centro del circolo differenziale, del quale triangolo il quadrato differenziale è quello costruito sul raggio del detto circolo.

72. (Fig. 7ª) Intorno ad un asse indefinito *ap* si faccia rotare idealmente un circolo differenziale di raggio *ap* unitamente al piano che lo contiene, il che facendo il circolo differenziale genera una sfera che diremo sfera differenziale; evidentemente qualunque sia l' inclinazione del piano nella sua rotazione restano inalterate nei varii triangoli differenziali delle sue serie tanto le scambievoli distanze dei vertici quanto le rispettive lunghezze dei lati dei quali resta invariato il rapporto.

Consegue che: Data una sfera differenziale qualsiasi punto dello spazio esterno alla sfera, può essere vertice di un triangolo il quale abbia per base un segmento radiante dal centro della sfera e del quale la differenza dei quadrati dei lati sia il quadrato del raggio della sfera.

73. (Fig. 7ª) La linea spezzata *p c d s z* . . . formata dalle congiungenti due a due i centri dei circoli generatori delle successive serie di triangoli differenziali, diremo *poligonale differenziale.*

È facile vedere che la *paligonale differenziale* può costruirsi con segmenti che stiano fra loro in un voluto rapporto, ed anche con segmenti che siano fra loro uguali ed anche uguali al raggio del circolo differenziale. In quest'ultimo caso i vertici p, c, d, s . . . della poligonale distano progressivamente dal centro della sfera nello stesso rapporto delle radici quadre dei numeri naturali. Si avrebbe cioè $ap : ac : ad : \ldots :: 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} \ldots$ ecc.

74. **Da un noto teorema sappiamo che i triangoli della stessa base e mediana hanno la stessa somma dei quadrati dei tre lati.**

Diciamo *addizionale* **una serie di triangoli che abbiano la stessa somma dei quadrati dei tre lati.**

Le *serie addizionali* di triangoli le distingueremo in *rettangole, acutangole* ed *ottusangole.*

75. **1° Un triangolo di una** *serie differenziale* **rettangola può generare una** *serie addizionale* **rettangola.**

2° Due triangoli qualunque di una colonna di una *serie differenziale acutangola o mista*, **possono generare una** *serie addizionale* **rettangola.**

Infatti s'iscriva un triangolo rettangolo. Sappiamo che tutti i triangoli rettangoli della stessa ipotenusa e perciò iscrittibili nello stesso circolo, hanno la stessa somma dei quadrati dei lati (Teorema di Pitagora).

Il gruppo di tali triangoli costituisce una serie addizionale rettangola.

(Fig. 7ª) Siano acb, adb due qualunque dei triangoli di una colonna di serie differenziale mista. Avremo l'equidifferenza $\overline{ad}^2 - \overline{db}^2 = \overline{ac}^2 - \overline{cb}^2$, dalla quale permu-

tando ricavasi $\overline{ad}^2 + \overline{cb}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{db}^2$ (M) ossia **nei due triangoli di ugual base e proiezione dei lati, la somma dei quadrati del lato maggiore dell'uno con quello del lato minore dell'altro è uguale.**

Pertanto nella equazione (M) i quadrati di ciascun membro possono considerarsi come quelli dei cateti di un triangolo rettangolo del quale l'ipotenusa sia la stessa, quindi ecc.

Per formare graficamente dà una serie differenziale altra serie addizionale rettangola (Fig. 8ª), all'estremo di un segmento *cb* lato minore di uno dei due triangoli prescelti nella serie differenziale, si elevi la perpendicolare $ba' = ad$ lato maggiore dell'altro triangolo; evidentemente il triangolo rettangolo *a'bc* sarà quello generato come alla equazione (M). Iscritto il triangolo *a'bc*, l'insieme dei triangoli iscritti nello stesso semicircolo costituisce la *serie addizionale rettangola* richiesta.

La somma dei quadrati dei tre lati di uno qualunque *c'b'a'* dei triangoli della serie addizionale rettangola è evidentemente $s. = 2, (\overline{a'b'}^2 + \overline{cb'}^2)$.

La coppia di triangoli prescelti nella serie differenziale per formarne altra addizionale, potrebbe costituirsi di un triangolo qualunque *adb* e di quello piatto *ahb*, il quale ha per lati le proiezioni comuni ai lati dei triangoli della colonna delle serie. In tal caso l'equazione M diviene $M' = \overline{ad}^2 + \overline{bh}^2 = \overline{db}^2 + \overline{ah}^2$.

Quanto si è detto, dimostrasi ugualmente per due triangoli di una colonna differenziale acutangola.

76. Un triangolo isoscele può generare una serie addizionale della stessa natura del suo angolo al vertice.

Infatti (Fig. 9ª), sia retto, acuto ovvero ottuso l'angolo al vertice *d* del triangolo isocele *adb*. Col centro *c* sulla metà della base e colla perpendicolare dal vertice ovvero mediana come raggio, si descriva la circonferenza *bda*: qualunque triangolo come *afb*, avente il vertice *f* sulla circonferenza, ha la stessa somma dei quadrati dei tre lati dell'isoscele *adb*, avendo con esso la stessa base e mediana.

Con la base *ab*, come diametro si descriva la circonferenza.

Quando l'isoscele *adb* ha la semibase $ca = cd$ mediana, allora la circonferenza *md'n*, *m'd''n'* si fondono in una sola *adb* della quale la semibase e la mediana sono raggi; il triangolo isoscele è rettangolo, e tali sono tutti i triangoli della stessa base dell'isoscele, iscritti nella circonferenza; questi nel loro insieme costituiscono una serie addizionale rettangola.

Quando nell'isoscele *adb* la semibase è minore della mediana, cioè $ca < cd'$ come in figura, allora l'isoscele è acutangolo, e tali sono ancora tutti i triangoli come *af'b* della stessa base e mediana dell'isoscele.

Quando nell'isoscele la semibase $ca > cd$ mediana, allora esso è ottusangolo, e tali sono tutti i triangoli della stessa sua base e mediana.

Questi due ultimi casi danno le serie addizionali acutangola ed ottusangola.

Consegue che *la mediana comune ai triangoli di una serie addizionale è l'altezza dell'isoscele fondamentale della serie.*

77. Dato un triangolo del quale la somma dei quadrati dei tre lati sia *s*, può facilmente costruirsi una

serie addizionale acutangola, rettangola ovvero ottusangola della quale la somma dei quadrati dei tre lati di ciascun triangolo sia quella stessa del dato triangolo.

Infatti, sia *s* la somma dei quadrati dei tre lati del triangolo *af'b* (Fig. 9). Adottato come base uno dei lati *ab* del triangolo che sia opposto ad un angolo acuto *f'*, e con la mediana *cf'* come raggio descritta la circonferenza, tutti i triangoli, come *af'b*, *ad'b* . . . della stessa base *ab* e dei quali la mediana è uguale alla *cf'*, hanno *s* per per somma dei quadrati dei tre lati, ed appartengono alla serie acutangola richiesta; inquantochè gli angoli ai loro vertici sono acuti per essere la semibase di ciascuno minore della rispettiva mediana.

Vogliasi formare una serie addizionale rettangola che dia la stessa somma s per i quadrati dei tre lati di ciascun triangolo della serie. Fra i triangoli della serie acutangola, come sopra costruita, ve ne sarà uno rettangolo *abh* del quale *s* è somma dei quadrati dei tre lati. Iscritto il triangolo rettangolo *abh*, per il già esposto tutti i triangoli di base *ah* ed iscritti nello stesso circolo, sono rettangoli ed hanno *s* per somma dei quadrati dei tre lati, ed insieme costituiscono la serie rettangola.

Si voglia formare una serie addizionale ottusangola della quale *s* sia somma dei quadrati dei tre lati dei triangoli che la costituiscono, ed allora scelto nella serie acutangola un triangolo *abo* che abbia alla base un angolo ottuso, col centro nel mezzo *z* del lato *ao* opposto all'angolo ottuso *b* e con la mediana *zb* come raggio descritta la circonferenza, tutti i triangoli che hanno la stessa base *ao* ed il vertice sulla circonferenza sono ottusangoli ed hanno *s* per somma dei quadrati dei tre lati e perciò costituiscono la serie ottusangola richiesta.

Si opera in modo analogo, quando il triangolo ini-

ziale sia rettangolo e vogliansi formare la serie acutangola ed ottusangola della stessa sua somma s dei quadrati dei tre lati, ovvero che il triangolo iniziale sia ottusangolo e vogliansi formare la serie rettangola ed acutangola.

78. Se la somma s dei quadrati dei tre lati dei triangoli di una serie addizionale è data numericamente, allora per costruirla si suppone che l'isoscele fondamentale della serie, sia equilatero, del quale evidentemente il quadrato di uno dei lati e $l^2 = \frac{s}{3}$ e perciò il suo lato è $l = \sqrt{\frac{s}{3}}$, e l'altezza $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$. Si costruisca il triangolo equilatero $ad'b$ di lato l e con la sua altezza cd' (Fig. 9ª) descrivasi la circonferenza; i triangoli della stessa base che abbiano il vertice sulla circonferenza formeranno la serie acutangola ed avranno ciascuno s per somme dei quadrati dei tre lati. Da questa serie, come si è detto, si ricavano volendo quelle rettangola ovvero ottusangola.

Si osservi che quando diciamo i lati, e non i tre lati di un triangolo, intendiamo di escludere la base di esso.

79. **La somma dei quadrati dei lati di un triangolo è uguale a quella dei quadrati di due segmenti costituiti della somma e della differenza della semibase e mediana del triangolo.**

(Fig. 10ª) Sia c punto medio delle basi ab, $a'b'$ dei triangoli ottusangolo adb, acutangolo $a'd'b'$. Si faccia

$cb' = cd$ mediana dell'ottusangolo. $cb = cd'$ mediana dell'acutangolo. Chiamando b la semibase di ciascun triangolo ed m la rispettiva mediana; per l'ottusangolo trovasi $ab' = b + m$, $b'b = b - m$; e per l'acutangolo $a'b = b + m$, $b'b = m - b$. Elevando a quadrato i secondi membri delle equazioni, sommando e riducendo trovasi $(b + m)^2 + (b - m)^2 = 2\,(b^2 + m^2)$, ossia il doppio quadrato della semibase e della mediana, che per un noto teorema sappiamo essere uguale alla somma dei quadrati dei due lati di ciascun triangolo.

Allorquando il triangolo è rettangolo, allora la semibase è uguale alla mediana, ed ambedue raggi del circolo circoscritto al triangolo; quindi nel triangolo rettangolo il segmento somma $b + m = d$ è diametro del circolo circoscritto ed ipotenusa del triangolo, ed il segmento differenza $b - m = 0$.

80. **In un triangolo la differenza fra il quadrato della base e la somma dei quadrati dei lati è data dal doppio rettangolo formato dalla somma per la differenza della semibase e mediana; aggiunto o tolto al quadrato della base secondo che questa sia opposta ad angolo acuto ovvero ottuso.**

Infatti (Fig. 11ª A, B), sia ab la base, cm la mediana di un triangolo ottusangolo ovvero acutangolo di lati l, l'.

Come dal precedente abbiamo $l^2 + l'^2 = \overline{am}^2 + \overline{mb}^2$. Si costruiscano i quadrati dei segmenti ab, am, mb come in figura A, B; dal solo esame di questa si vede che il quadrato Q della base ab è uguale alla somma dei quadrati M, N dei segmenti am, mb, più meno i due rettangoli R, R' aventi per base am e per altezza mb, secondochè il dato triangolo sia acutangolo ovvero ottusangolo.

81. Segue dal precedente che: **In un triangolo il rettangolo formato con la somma per la differenza della semibase per la mediana, è uguale a quello formato con uno dei lati del triangolo per la proiezione su questo dell'altro lato.**

Infatti, da un noto teorema sappiamo: **che la differenza fra la somma dei quadrati dei lati e quello della base è $\pm$ il doppio rettangolo di un lato per la proiezione dell'altro su di esso, secondochè detti lati formino tra loro angolo ottuso ovvero acuto.**

Riescirà facile dimostrare i seguenti, 82 . . . . 88:

82. **Il doppio quadrato dell'altezza presa dal vertice di un triangolo di una serie addizionale, è differenza fra il doppio quadrato del lato dell' isoscele fondamentale della serie, ed il prodotto dei segmenti nei quali la perpendicolare dal vertice divide la base.**

83. **Comunque, si divida in due parti m, n la somma s dei quadrati dei lati di triangoli di una serie addizionale, i segmenti $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ sono lati di un triangolo della stessa serie.**

84. Sopra una direzione passante per il centro di una circonferenza, siano determinati due punti equidistanti dal centro; congiunto un punto qualunque della circonferenza con quei due punti, la somma dei quadrati delle due congiungenti è costante.

85. Siano concentriche e di diametri coincidenti due circonferenze (Fig. 10ª). Si congiungano gli estremi del

diametro della circonferenza maggiore con un punto della minore formando così un triangolo ottusangolo *O* avente per base il diametro maggiore; si congiungano gli estremi del diametro della circonferenza minore con un punto della circonferenza maggiore, formando così un triangolo acutangolo A avente per base il diametro minore: risulterà che « La somma *s* dei quadrati dei quattro segmenti congiungenti un punto della circonferenza maggiore con gli estremi dei due diametri, è uguale a quella dei quadrati dei tre lati dell'ottusangolo *O;* e la somma *s'* dei quadrati dei quattro segmenti congiungenti un punto della circonferenza minore con gli estremi dei diametri, è uguale a quella dei quadrati dei tre lati del triangolo acutangolo A.»

86. Siano due circonferenze concentriche, ed in esse quante vogliansi corde concorrenti ad un estremo del diametro della circonferenza maggiore. Avremo che: **La circonferenza descritta sul raggio della circonferenza maggiore, assunto come diametro, taglia per metà tutte le suddette corde.**

87. (Fig. 12ª) Se dal mezzo *c* dell'ipotenusa *ab* di un triangolo rettangolo *asb* e con raggi arbitrari *cq*, *cq'* . . . si taglia in *p*, *r*, il cateto *bs*, e si congiungono queste intersezioni con l'estremo *a* della ipotenusa. Avremo: $\overline{bq}^2 + \overline{qa}^2 = \overline{br}^2 + \overline{ra}^2 = \overline{br}^2 + \overline{rs}^2$ . . ecc. Avremo ancora: $bq \times qa = br \times rs$ « $bq' \times q'a = bp \times ps$ . . . ecc.

88. (Fig. 13ª) Col centro nell'estremo *c* del diametro *cb* di una circonferenza *o*, e con raggi arbitrari *cm*, *cm'* si descrivano gli archi che taglino in *x*. *x'* la circonfe-

renza o. Avremo: $bz + zr \times rb = bc + cm \times mb = \overline{bx}^2$ ed anche $bz' + z'n \times nb = bc + cm' \times m'b = \overline{bx''}^2$... ecc.

89. **In un triangolo la somma dei due rettangoli formati da ciascun lato con la proiezione della base su di esso, è uguale al rettangolo formato dalla base per la somma su di essa delle proiezioni dei lati.**

Infatti (Fig. 14ª A), nel triangolo ottusangolo adb siano an, bm proiezioni della base ab sui lati; e siano ap, bp proiezioni dei lati sulla base. I triangoli rettangoli apd, anb sono simili per aver comune l'angolo a; quindi $ad : ap :: ab : an$, ossia $ad \times an = ap \times ab$ (A). I triangoli rettangoli bpd, bma sono simili per aver comune l'angolo b, quindi $bd : bp :: ab : bm$, ossia $bd \times bm = bp \times ab$ (B).

Sommando termine a termine l'equazioni A, B trovasi $ad \times an + bd \times bm = ap + bp \times ab$.

(Fig. 14ª B) Nel triangolo rettangolo adb, sia ah proiezione della base ab sulla ipotenusa: la proiezione della stessa base sul cateto bd è nulla. I triangoli rettangoli abd, ahb sono simili per aver comune l'angolo a, quindi $da : ab :: ab ; ah$; da cui $da \times ah = \overline{ab}^2$.

(Fig. 14ª c) Nel triangolo acutangolo adb siano am, bm proiezioni della base sui lati, ed ap, bp proiezioni dei lati sulla base. I triangoli rettangoli apd, abm sono simili per avere comune l'angolo a, quindi $ad : ap :: ab : am$, ossia $ad \times am = ap \times ab$ (A). I triangoli rettangoli bpd, bna sono simili per aver comune l'angolo b onde $bd : bp :: ab : bn$, ossia $bd \times bn = bp \times ab$ (B), sommando termine a termine le equazioni A, B trovasi $ad \times am + bd \times bn = ap + bp \times ab$.

90. **In una colonna differenziale di triangoli, descritto il circolo sulla base comune alla serie come diametro, i rettangoli formati coi lati dei triangoli della serie che radiano dallo stesso estremo della base comune, ciascuno per la sua parte intercetta nel detto circolo, sono fra loro equivalenti.**

Infatti (Fig. 15 A), nella serie mista siano i triangoli adb, aob. I triangoli rettangoli apd, abf sono simili per aver comune l'angolo acuto a, quindi $ad : ap :: ab : af$, ossia $ad \times af = ab \times ap$.

I triangoli rettangoli apo, abh, aventi comune l'angolo acuto a, sono simili e danno $ao : ap : ab : ah$, cioè $ah \times ao = ab \times ap$.

Paragonando le due equazioni trovasi:
$ad \times af = ah \times ao = \ldots = ab \times ap$.

(Fig. 15ª B) Nella serie rettangola siano i triangoli apd, apo; sulla base comune ap come diametro si descriva il circolo.

I triangoli rettangoli apo, aep, essendo simili, danno $ae : ap :: ap : ao$, ossia $ae \times ao = \overline{ap}^2$.

I triangoli rettangoli simili apd, amp danno $am : ap :: ap : ad$, ossia $am \times ad = \overline{ap}^2$ da cui $ae \times ao = am \times ad = \ldots = \overline{ap}^2$.

(Fig. 15ª C) Nella serie acutangola siano i triangoli adg, aog.

I triangoli rettangoli simili apd, ang danno $an : ag :: ap : ad$, ossia $an \times ad = ag \times ap$.

I triangoli rettangoli simili asg, apo danno $as : ag :: ap : ao$, ossia $as \times ao = ag \times ap$. Paragonando le due equazioni trovasi $an \times ad = as \times ao \ldots = ag \times ap$.

Si osservi (Fig. 15ª c) che, rapporto al circolo di diametro ag, la perpendicolare indefinita pd sul suo prolungamento è esterna al circolo; rapporto al circolo di diametro ap (B), la perpendicolare indefinita dp è tangente al circolo; rapporto ai circolo di diametro ab (A), la perpendicolare indefinita dp è secante al circolo.

Ne deduciamo che **Dato nel piano un circolo ed una direzione sia questa secante, tangente ovvero esterna al circolo, e dato il diametro di questo perpendicolare alla detta direzione, tutte le rette che passano per un estremo del diametro ad incontrare la direzione moltiplicate ciascuna per la sua parte intercetta nel circolo, danno lo stesso prodotto.**

Ciò è dimostrato nel precedente teorema per un circolo di diametro ag, e per rette come ad, ao, ap, tracciata dall'estremo a del diametro ad incontrare in d, o, p, la direzione dp perpendicolare al diametro stesso, ed intersecanti la circonferenza nei punti n, s, g. Dimostriamo, come lo stesso avviene, per una qualunque delle rette tracciate per l'altro estremo g del diametro più prossimo alla direzione dp. La zg incontri la direzione in o e la retta rg incontri la direzione in d. I triangoli rettangoli simili gpo, gza danno $go : gp :: ga : gz$, ossia $go \times gz = gp \times ga$.

I triangoli rettangoli simili gpd, gra danno $gd : gp :: ga : gr$, ossia $gd \times gr = gp \times ga$, da cui $go \times gz = gd \times gr = \ldots = gp \times ga$.

Per un circolo di diametro ap, tangente alla direzione dp, qualsiasi retta radiante dall'estremo p del diametro ad incontrare la direzione in un punto qualunque d di essa, non ha parte intercetta nella circonferenza, ossia tale parte intercetta è zero, talchè il prodotto delle rette radianti dall'estremo p del diametro ad incontrare un punto qualsiasi dalla direzione è nullo.

Per un circolo di diametro ab, al quale la direzione dp sia secante, come bd, bf, ba radianti dall'estremo b del diametro più prossimo alla direzione, ragionando come facemmo nel precedente per le rette ad, ao, ap, si troverà che $bd \times bh' = bo \times bf' = bp \times ba = bf \times bm = bh \times bs = \ldots$.

91. **Nel piano di un circolo, data una striscia perpendicolare ad un suo diametro, ed un fascio di corde radianti da un estremo del diametro. Il prodotto di ciascuna corda per la parte della sua direzione intercetta nella striscia è costante. Tale prodotto è espresso numericamente dal valore lineare della doppia larghezza della striscia moltiplicata per il raggio.**

Infatti (Fig. 16ª). La striscia formata dalle parallele bm'', ce sia perpendicolare al diametro ag di un circolo c'. Da un estremo a del diametro si tracciano quante vogliansi direzioni ae, ah .... ad incontrare la striscia, e dal secondo estremo g del diametro le direzioni ge', gh' .... rispettivamente parallele alle ae, ah, per comodo della dimostrazione.

Sul diametro ag sia $ap = a'p'$ larghezza della striscia.

Si elevi la perpendicolare pd che per ipotesi passi per l'estremo o della corda ao e si tracci $az = ao$.

Dal precedente abbiamo $ag \times ap = as \times ad = ao \times \times az = \overline{ao}^2$: **ma il rettangolo dei lati un triangolo è uguale a quello della sua altezza per il diametro del circolo circoscritto**; quindi per l'isoscele iscritto zao avremo $az \times ao = ao \times ao = \overline{ao}^2 = ag \times ap$. Sia ad ipotesi il diametro $ag = 2$, ossia il circolo abbia per raggio l'unità lineare; sarà $\overline{ao}^2 = 2\,ap$; ma $ap = a'p'$ larghezza della striscia,

quindi $ao^2 = 2\,a'p'$ e per essere $go' = ao$, sarà anche $\overline{go'}^2 = 2\,a'o'p'$. Quando è il raggio $r \gtrless 1$, anche i valori lineari ao, ap risultano moltiplicati per r; talchè sarà sempre $\overline{ao}^2 = 2\,a'p'r$. Per essere parallele le rette dp, $m''b$, ec e segmento $ap = a'p'$, è evidente che $ad = me$, $an = fh$ .... e dà ciò $as \times me = ak \times fh = 2\,a'p'r$; inoltre, essendo le direzioni ge', gh' per costruzione parallele alle ae, ah risulterà corda $ge' = as$ ed $m'e'' = me$; quindi $ge' \times m'e'' = gh' \times f'h'' = 2\,a'p'r$.

I segmenti paralleli ed uguali me, $m'e''$ danno evidentemente $as \times m'e'' = 2\,a'p'r$. Si tracci la direzione $c'p''$ del diametro passante per l'estremo s della corda as. Avremo: ang. $p''se = asc' = eap'$; talchè, abbassate alla $c'p''$ le perpendicolari $m'a''$, $e''p'''$, risulterà segmento $a''p'' = a'p'$. Ne deduciamo che: *Nel piano di un circolo data una sua corda* as, *un segmento* m'e'' *ad essa parallelo, e le direzioni dei diametri passanti per i suoi estremi; il prodotto* as × m'e'' *della corda per il segmento, è espresso in valore lineare da una delle doppie proiezioni rette* a'p', a''p'' *dello stesso segmento sulle direzioni dei detti diametri moltiplicata per il raggio* c'a = r.

92. **In un triangolo iscritto, sè dall'estremo della corda bisettrice di uno dei suoi angoli si abbassa la perpendicolare ad uno dei lati che lo formano, ed anche al terzo lato.**

1. Il segmento del lato, prolungato ove occorra, compreso fra il piede della perpendicolare ed il vertice, è semisomma dei lati formanti quel vertice.

2. Il segmento, compreso tra il piede della perpendicolare e l'altro estremo del lato, è semidifferenza degli stessi lati.

3. Il segmento, compreso tra il piede della perpendicolare al terzo lato ed uno degli estremi di questo, è la sua metà.

Infatti (Fig. 17ª), sia hp corda bisettrice dell'angolo h del triangolo ahb: dal suo estremo p si abbassino ai lati le perpendicolari pm, pd, pn; si traccino le pa, pb e si faccia segmento $ds = da$.

1. Essendo il punto p medio dell'arco apb risulta $pa = pb$. Il triangolo rettangolo $hdp = hmp$ per avere l'ipotenusa comune ed angoli acuti uguali in h; onde $pd = pm$ ed $hd = hm$. Il triangolo rettangolo $pda = pbm$ per avere l'ipotenusa ed un cateto uguali onde $da = bm$; ed essendo $hd = hm$, sarà $ha - ad = hb + (bm = ad)$ ossia $hd = hm = \frac{ha + hb}{2}$

2. Essendo segmento $ds = da = bm$ sarà $hs = hb$ ed $as = ha - hb$; da' cui $ad = bm = \frac{ha - hb}{2}$.

3. Per essere il punto p medio dell'arco apb, la perpendicolare pn al lato o corda ab la divide per metà

93. **In un triangolo rettangolo si abbassi la perpendicolare dal vertice alla ipotenusa e si tracci la mediana.**

1. **Sè degli angoli m, n che la perpendicolare forma coi cateti, l'uno è divisore intero dell'altro,**

2. **Sè degli angoli che la mediana forma coi cateti l'uno è divisore intero dell'altro.**

3. **Sè dei due angoli acuti del triangolo rettangolo l'uno è divisore intero dell'altro, sempre nel circolo circoscritto al triangolo, il cateto minore è lato di poligono regolare iscritto di $2 \times (q + 1$ lati, essendo q il quoto $\frac{m}{n}$; ed il cateto maggiore è lato di poligono regolare stellato di $q + 1$ lati.**

Infatti (Fig. 18ª A), per ipotesi l'angolo *dbe* sia divisore intero dell'angolo *abe*, ossia contenuto in esso un numero esatto, q di volte. Le corde dei $q+1$ angoli uguali a quello *dbe*, sono fra loro uguali ed anche uguali al cateto *db*; pertanto essendo retto l'angolo dato *abd*, la somma degli archi $dm + afm = 180°$, e perciò la somma $q + 1$ delle corde uguali costituisce il semiperimetro di un poligono regolare iscritto di lato *db*, del quale l'intero perimetro si forma di $2 \times (q+1)$ lati uguali al cateto minore del triangolo rettangolo dato.

Poichè la semicirconferenza *afd* contiene $q+1$ archi uguali a *bd* ed il cateto maggiore *ab* sottende un arco $asb = q$ volte *db*, ogni qual volta si riporti sulla circonferenza successivamente la corda *ab*, la distanza dal suo estremo ad uno di quelli del diametro, considerati alternativamente, aumenta di un arco *db*. Così (Figura 18ª B) il cateto *ab* dà arco *db*, e riportato in *bf*, dà arco $fa = 2\ db$; riportato in *fg* dà arco $gbd = 3,\ db$ .... e così di seguito, finchè riportato $q+1$ volte sulla circonferenza, il poligono regolare stellato si chiude con $q+1$ lati uguali al cateto maggiore *ab* del dato triangolo rettangolo.

2. La mediana del triangolo rettangolo *abd* (A) coincide col diametro del circolo ad esso circoscritto (45) e come derivati inversi risulta angolo $abf = dbe$; e perciò anche angolo $fbd = abe$; onde quanto si è detto per gli angoli formati coi cateti dalla perpendicolare dal vertice, si applica agli angoli formati dalla mediana con gli stessi cateti.

3. Per il triangolo isoscele *acb* risulta angolo $bad = abf$, e conseguentemente angolo $adb = fbd$; quindi quanto si è detto per gli angoli formati coi cateti dalla

perpendicolare dal vertice, si applica agli angoli acuti del dato triangolo rettangolo.

94. *La somma* ah + hb *dei lati di un triangolo* ahb (Fig. 19ª) *è legata alla base* ab *dalla correlazione* $ah + hb = \frac{\overline{ab}^2}{ap}$, *ove* ap *è il segmento della base determinato dalla parallela alla bisettrice del vertice* h, *tracciata dall'estremo di un segmento* ao = ab *preso sopra uno dei lati prolungato ove occorra.*

Infatti, per la bisettrice hf abbiamo $ah : hb :: af : fb$ da cui $ah + hb : af + fb :: ah : af$ ma $ah : af :: ao : ap$, quindi $ah + hb : ab :: (ao = ab) : ap$, ossia $ah + hb = \frac{\overline{ab}^2}{ap}$.

95. **La somma s degli angoli formati dalla stessa parte di una linea spezzata di n lati, che abbia i segmenti estremi paralleli e rivolti nello stesso senso, è $s = 180° (n - 2)$. ossia uguale alla somma degli angoli perimetrali interni di un poligono di n lati.**

Infatti (Fig. 20ª) siano paralleli e volti nello stesso senso i segmenti estremi ba, hi della spezzata $abc \ldots . hi$. Si tracci la trasversale ha. Il poligono $ahcb$ ha lo stesso numero n dei lati della spezzata; ma per le parallele ba, hi e secante ha, sarà angolo $bah = ahi$: ossia la somma degli angoli perimetrali interni del poligono è uguale a quella degli angoli della spezzata dalla parte in cui sono rivolti i suoi segmenti estremi paralleli. Consegue che: *Quando i segmenti estremi della spezzata sono paralleli e volti in senso contrario, la somma dei suoi angoli da una qua-*

lunque delle sue parti è $s=180^\circ(n-1)$, *ossia uguale a quella degli angoli perimetrali interni del poligono di* $n+1$ *lati.*

Se i segmenti estremi della spezzata sono divergenti o convergenti e volti nello stesso senso, la somma dei suoi angoli della parte in cui sono volti i segmenti estremi è $s=180^\circ(n-2)\pm a$, *essendo* a *l'angolo che un segmento estremo forma con la parallela all'altro segmento estremo.*

Quando i segmenti estremi sono divergenti o convergenti e volti in senso contrario, la somma degli angoli è $s=180^\circ(n-1)\mp a$, *essendo* a *l'angolo come sopra.*

Dagli esposti principii si deduce che:

Per più linee spezzate di ugual numero di lati, ancorchè intrecciate fra loro, *le somme degli angoli dalla stessa parte delle spezzate sono uguali; se i lati estremi di esse sono paralleli e volti nello stesso senso; se le spezzate hanno un segmento estremo comune e terminano su di un allineamento formante parte di esse; se le spezzate sono racchiuse fra due allineamenti* ed in altri pochi casi che omettiamo per brevità.

96. Per quanto può interessare la topografia, dallo svolto fin qui emerge, che rilievando delle figure rettilinee mediante la misura dei loro angoli, non sempre questi possono riprodursi graficamente con esattezza indiscutibile; sia perchè molti angoli non sono graficamente costruibili, sia perchè la graduazione dei goniometri in commercio può ragionevolmente dubitarsi non esatt ssima. Pertanto, vari degli svolti teoremi dimostrano che il rilievo e la riproduzione di un triangolo può effettuarsi senza la misura dei suoi angoli; e siccome le figure rettilinee si decompongono in triangoli dei quali nella maggior parte dei casi gli elementi rettilinei si pos-

sono rigorosamente misurare, così riteniamo che per l' esatta riproduzione delle figure sia prudente l'astenersi per quanto è possibile dalla misura e ricostruzione dei loro angoli.

Descriveremo in seguito un Istrumento mediante il quale sarà facile rilevare sul terreno i triangoli mediante i loro elementi rettilinei, intanto diamo il seguente:

97. **Elenco dei gruppi determinanti rettangolari costituiti di due o tre elementi tra i quali non entrano gli angoli.**

1. I tre lati del triangolo.
2. Due lati ed il raggio del circolo circoscritto (due soluzioni).
3. Due lati e l'eccentricità di uno di essi (due soluzioni).
4. Due lati e la congiungente i loro punti medi.
5. Due lati e la lunghezza della perpendicolare dall'estremo dell' uno sull' altro.
6. Due lati e la perpendicolare dal vertice comune al 3° lato.
7. Due lati, e la mediana dal vertice comune.
8. Due lati e la mediana dall'estremo dell'uno sull'altro.
9. Due lati ed uno dei segmenti in cui la perpendicolare dal vertice comune divide il terzo lato.
10. Due lati ed uno dei segmenti in cui la perpendicolare dall'estremo dell'uno divide l'altro.
11. Due lati e l'area del triangolo.
12. Due lati e la distanza da uno dei vertici al baricentro.
13. Due lati e la distanza dal punto medio di uno di essi al baricentro.
14. Un lato, il raggio e l'eccentricità di un altro lato.
15. Un lato la sua eccentricità a quella di altro lato.
16. Un lato la sua eccentricità o il raggio e la perpendicolare dal vertice opposto.

17. Un lato, la sua eccentricità o il raggio e la perpendico lare dà un estremo del lato ad altro lato.

18. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, ed uno dei segmenti in cui la perpendicolare dal vertice opposto lo divide.

19. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, e la mediana.

20. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, e distanza dal suo punto medio al baricentro.

21. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, e distanza dal vertice opposto al baricentro.

22. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, e la corda bisettrice dell'angolo opposto

23. Un lato la sua eccentricità o il raggio e la corda bisettrice di un angolo al suo estremo.

24. Un lato la sua eccentricità o il raggio e posizione dell'excentro corrispondente al lato.

25. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, ed il segmento della sua mediana tra il lato ed il baricentro.

26. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, ed il segmento sulla mediana dal vertice opposto al baricentro.

27. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, e l'excentro di un altro lato.

28. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, e la congiungente i punti medi di esso e di altro lato.

29. Un lato, e le perpendicolari dai suoi estremi agli altri lati.

30. Un lato, e le congiungenti il suo punto medio con quello degli altri due lati.

31. Un lato, la perpendicolare dal vertice opposto ed uno dei segmenti in cui questa divide il lato.

32. Un lato, e le mediane dai suoi estremi agli altri lati.

33. Un lato, uno dei segmenti in cui la proiezione dal vertice opposto lo divide, e l'area del triangolo.

34. Un lato e posizione del baricentro riferito ad esso.

35. Un lato, la perpendicolare ad esso dal baricentro ed uno dei segmenti in cui questa divide il lato.

36. Un lato, e la posizione dell'ortocentro riferito ad esso.

37. Un lato, la perpendicolare ad esso dall'ortocentro, ed uno dei segmenti in cui essa lo divide.

38. Un lato, e posizione dell'incentro riferito ad esso.

39. Un lato, la perpendicolare ad esso dall'incentro, ed uno dei segmenti in cui questa divide il lato.

40. Un lato, e le distanze dai suoi estremi al suo excentro.

41. Un lato, la perpendicolare ad esso dall'excentro, ed uno dei segmenti in cui questa divide il lato.

42. Un lato, ed i segmenti sugli altri due lati dalle perpendicolari ad essi dai suoi estremi.

43. Un lato, e dal vertice opposto la mediana e la perpendicolare ad esso.

44. Un lato e distanze del baricentro dal suo punto medio e dà uno dei suoi estremi.

45. Un lato, la perpendicolare ad esso dall'excentro e la distanza dell'excentro da un suo estremo.

46. Un lato, la sua eccentricità o il raggio, e l'area.

47. Un lato, la sua mediana e l'area.

48. Un lato, uno dei segmenti in cui il baricentro divide la sua mediana e l'area.

49. Le tre mediane.

50. Le tre distanze degli excentri tra loro.

51. Le tre distanze tra i piedi delle perpendicolari dai vertici ai lati opposti.

52. Le tre distanze tra i piedi delle mediane.

53. Le tre distanze fra gli estremi delle corde bisettrici dai vertici.

54. Le congiungenti due a due gli estremi dei diametri dai vertici nel circolo circoscritto.

55. Le distanze dell'ortocentro da due lati, e da un estremo di uno di essi.

56. Le distanze del baricentro ai tre vertici.

57. Sulle mediane le distanze dal baricentro ai tre lati.

58. La distanza dell'incentro dà un lato e dal suo estremo e dall'estremo di altro lato.

59. La distanza dell'incentro dà un lato e dai suoi estremi.

60. La distanza dell'excentro dal lato corrispondente e dai suoi estremi.

61. La distanza di un excentro dà due vertici e di altro excentro dal terzo vertice.

62 Un lato e rapporto ad esso posizione del centro e dell'ortocentro.

63. Un lato e riferiti ad esso posizione del centro ed incentro.

64. Un lato e rispetto ad esso la posizione del baricentro.

65. Distanza dell'incentro all'estremo di un lato ed all'excentro corrispondente ad esso e distanza tra l'excentro e l'altro estremo del detto lato.

66. Due lati e corda bisettrice dal vertice comune.

67. Un lato, più meno la differenza fra questo ed altro lato e la corda bisettrice dal vertice comune.

68. Un lato il raggio e la corda bisettrice da un estremo del lato.

69. Un lato e dà un suo estremo la bisettrice e la perpendicolare ad altro lato.

70. Un lato e la posizione degli excentri degli altri due lati.

71. Due mediane ed un'altezza.

72. La corda perpendicolare dà un vertice al lato opposto e quella che congiunge l'estremo della prima con un estremo del lato perpendicolare ad essa.

. . . . . .

N. B. *Il superiore elenco non è completo.*

98. Da ciascun gruppo determinante di due o tre elementi lineari, possono formarsi moltissimi altri gruppi, mediante $\frac{1}{n}$ di ciascun elemento; ad esempio:

Potrà costruirsi il triangolo di lati a, b, d quando

sia dato il gruppo determinante $\frac{a,}{n}\ \frac{b,}{n}\ \frac{d,}{n}$ ovvero quello $\frac{a,}{m}\ \frac{b,}{n}\ \frac{d.}{s}$

99. Quando tra gli elementi del gruppo entra la bisettrice ovvero la corda bisettrice può, in luogo della detta bisettrice, sostituirsi quella che forma col lato del triangolo, un angolo che sia $\frac{1}{n}$ di quello che la corda bisettrice fa con lo stesso lato.

100. Ciascun triangolo *dipendente* ha altrettanti gruppi determinanti del suo triangolo *primo*; e quando sia noto un triangolo dipendente, lo è anche il suo triangolo primo (36); talchè per costruire un voluto triangolo basta che sia dato un gruppo determinante di uno qualunque dei suoi triangoli dipendenti.

101. Sono poi molti i gruppi determinanti triangolari costituiti di quattro o più elementi fra i quali non entrano i suoi angoli.

102. La geometria offre quindi più centinaia di modi per costruire con esattezza un triangolo e perciò qualsiasi figura piana di contorno rettilineo, senza ricorrere alla misura degli angoli, la quale se per avventura sia data esatta dal goniometro sul terreno, può facilmente errarsi nella riproduzione in disegno mediante il quadrante graduato.

Qualora poi sia indispensabile l'uso dei goniometri, allora alla graduazione per gradi e decimi del rispettivo

circolo, è preferibile sostituire la graduazione dei circoli stessi per arco 3° e suoi duennesimi, inquantochè:

1. Tale graduazione si eseguisce geometricamente e perciò può ottenersi rigorosamente esatta.

2. Tutti gli angoli misurati con essa sono riproducibili mediante la riga ed il compasso.

3. Il valore di uno qualunque di tali angoli, benchè piccolissimo, è sempre espresso da un numero decimale finito.

4. Le operazioni aritmetiche, eseguite tra i valori dei detti angoli, danno per risultato finale il valore di un angolo costruibile mediante la riga ed il compasso.

5. Le corde che abbracciano i detti angoli, dei quali il vertice è al centro, sono lati di poligoni regolari o regolari stellati iscrittibili.

Sono perciò incalcolabili i vantaggi che la geometria applicata può ricavare dalla graduazione del circolo per arco 3° e suoi duennesimi.

103. **Dato un circolo graduato per archi 3 e duannesimi, possono facilmente formarsi le tavole delle linee trigonometriche dei suoi angoli.**

Infatti (Fig. 21ª), si costruisca un arco del quale sia noto il valore esatto della corda in parti di raggio 1, ad ipotesi arco $adb = 60°$ del quale la corda è raggio $r = 1$.

1. Tracciata la bisettrice dd' avremo arco $aed = 30°$, da cui *seno* $30° = am = 0{,}50$ » *coseno* $30° = cm = \sqrt{1 - \overline{0.50}^2}$ » *seno verso* $30° = md = 1 - \cos. 30°$ » *corda* $30° = ad = \sqrt{2.\ \text{sen. verso } 30°}$.

2. Tracciata la bisettrice *oo'* dell'arco 30°, sarà arco *dfo* = 15°, da cui *sen. 15°* = $\frac{corda\ 30°}{2}$ » *cos. 15°* = $= \sqrt{1 - \text{sen. } 15°^2}$ » *sen. verso 15°* = 1 — *cos. 15°* » *corda 15°* = $\sqrt{2.\ \text{sen. verso } 15°}$.

3. Tracciata la bisettrice *gg'* dell'arco 15°, avremo arco *og* = 7°,5, da cui *sen.* 7°,5 = $\frac{corda\ 15°}{2}$ » *cos.* 7,°5 $= \sqrt{1 - \text{seno } \overline{7,°5}^2}$ » *sen. vers.* 7°,5=1—*cos.* 7°,5 » *corda* 7°,5 $= \sqrt{2.\ \text{sen. verso } 7°,5}$.

Così, proseguendo dall'uno all'altro duennesimo dell'arco 60°, si giunge ad un arco tanto piccolo da potersene ritenere la corda come sua rettificazione; ad esempio: la quindicesima bisettrice dell'arco 60°, dà il valore delle linee trigonometriche dell'arco $\frac{60°}{2^{15}} = \frac{60°}{32768}$; ma nelle tavole trigonometriche in uso per minuti primi e secondi, ordinariamente si parte dal supposto che sia *arco 10" = seno 10"*, inquantochè la lunghezza rettificata dall'arco 10" è compresa tra quelle delle rette sen. 10" e tang. 10", e queste due linee trigonometriche hanno comuni dodici cifre decimali. Ma arco 10" = $\frac{\pi}{64800}$ = 0,000048481368110, mentre per essere arco 60° = $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi : 3}{2^{15}}$ = 0,000031957930029, risulta quindi, che arco $\frac{60°}{2^{15}}$ < 10"; e poichè la corda, molto più del seno, si approssima alla rettificazione dell'arco, così è più esatto

l'adottare per origine delle tavole trigonometriche corda $\frac{60^\circ}{2^{15}}$ che sen. 10".

Non occorre dire, che ottenute come sopra le linee trigonometriche seno, coseno, seno verso e corda degli archi, se ne traggono nei modi ordinari i valori delle altre linee trigonometriche; e che le tavole di queste linee, nonchè le logaritmiche corrispondenti, si formano con gli stessi metodi seguiti per quelle degli archi divisi in parti decimali di grado 1°.

PARTE SECONDA

CAPITOLO I.

104. Per quanto diremo in seguito sulla formazione delle potenze e determinazione delle radici ennesime delle quantità geometriche, crediamo opportuno di trattare in precedenza sulla estrazione delle radici ennesime dei numeri, tanto più che nei trattati scolastici di aritmetica si trascura questo ramo importante del calcolo numerico.

Per brevità, toccando appena la parte teorica, esporremo alcuni modi pratici per estrarre la radice ennesima di esponente primo maggiore di 3.

105.

	Tavola delle potenze dei primi nove numeri naturali								
1ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2ª	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3ª	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4ª	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5ª	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6ª	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7ª	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
»									

Si vede dalla tavola superiore che:

a) *Una potenza è numero pari o dispari, secondochè tale sia la sua radice;*

b) *Le cifre delle unità delle potenze successive di un numero si succedono periodicamente, ed in particolare le potenze dei numeri 1, 5, 6, terminano per le cifre 1, 5, 6, e quelle dei numeri 4 e 9 terminano per i periodi 4, 6, 9, 1;*

c) *Le potenze di uguale esponente dispari terminano per cifre diverse di unità, ed imparticolare le potenze quinte terminano per la stessa cifra di unità della radice. Inoltre;*

d) *Quando un numero intero si forma di una cifra semplice seguita da* m *zeri, la sua potenza di grado* n *è numero terminante per* mn *zeri.* Ad esempio $\overline{300}^5 = 2430000000000$ termina per $2 \times 5 = 10$ zeri, poichè due sono gli zeri della radice e 5 è il suo esponente.

e) *La potenza di grado* n *di un numero intero, si forma di tante cifre, quante ne avrebbe la sua cifra di ordine più elevato, sè considerata nel suo valore, fosse elevata a potenza dello stesso grado* n. Così $\overline{376}^5 = 7499229976576$ si forma di tredici cifre, avendone altrettante $\overline{300}^5$;

f) *Sè di un numero intero di* m *cifre decomposto nelle sue unità, decine, centinaia . . . si formano le potenze, queste si costituiscono successivamente della som-*

ma di altrettanti prodotti, quante sono le unità contenute nella potenza dello stesso grado del numero m *delle cifre di quello dato.* Ad esempio $\overline{376}^5 = 7699229976576$ si forma della somma di $3^5 = 243$ prodotti, inquantochè sono tre le cifre formanti la radice e 5 il suo esponente;

g) *Dei vari prodotti concorrenti per somma alla formazione della potenza ennesima di un numero decomposto nelle sue unità, decine, centinaia . . . ., il massimo è la potenza ennesima della sua cifra di ordine più elevato, ed il minimo è la potenza ennesima della cifra delle sue unità.* Così il massimo prodotto concorrente per somma alla formazione del $7699229976576 = \overline{376}^5$ è il $\overline{300}^5 = 2430000000000$, ed il minimo è $6^5 = 7776$;

h) *La potenza ennesima di un numero intero non primo si forma del prodotto delle potenze ennesime di tutti i suoi fattori primi.*

Ad esempio, poichè decomposto nei suoi fattori primi trovasi $105 = 3 \times 5 \times 7$, sarà $\overline{105}^5 = 3^5 \times 5^5 \times 7^5 = 243 \times 3125 \times 16807 = 12762815625$:

k) *La potenza ennesima di numero decimale non primo si compone del prodotto delle potenze ennesime dei suoi fattori primi, ed ha tante cifre decimali, quante sono le unità del prodotto fra il suo esponente* n *ed il numero* p *delle sue cifre decimali.*

Ad esempio $\overline{1,05}^5$ sarà numero di 10 cifre decimali,

per essere 2 le sue cifre decimali e 5 il suo esponente: onde $\overline{1,05}^5 = \frac{2^5 \times 5^5 \times 7^5}{1,0000000000} = 1,2762815625.$

106. Gli esposti caratteri delle potenze dei numeri, inversamente applicati. conducono alla determinazione delle loro radici ennesime, come dai seguenti esempi:

107. Estrazione della radice ennesima di un numero che sia potenza ennesima esatta.

1. Domandasi $\sqrt[5]{12762815625}$. Decomposto nei suoi fattori primi trovasi $12762815625 = 3^5 \times 5^5 \times 7^5$, e perciò

$\sqrt[5]{1276281565} = 3 \times 5 \times 7 = 105$; ossia

La radice ennesima di un numero che risulti composto del prodotto di fattori tutti elevati allo stesso esponente n, *si forma del prodotto di tutti questi fattori adottati senza esponente.*

2. Si richieda $\sqrt[5]{1,2762815625}$. Poichè sono 10 le cifre decimali del numero, mentre 5 è l'esponente della chiesta radice; questa avrà $\frac{10}{5} = 2$ cifre decimali (k). Considerato il numero come intero e decomposto nei suoi fattori primi, trovasi $12762815625 = 3^5 \times 5^5 \times 7^5$ di radice quinta $3 \times 5 \times 7 = 105$; onde

$$\sqrt[5]{1,2762815625} = 1.05 \text{; ossia}$$

La radice ennesima di un numero di p *cifre decimali, che considerato come intero, risulti composto di*

fattori tutti elevati allo stesso suo grado n, *si forma del prodotto dei detti fattori adottati senza esponente; tale radice ennesima è numero di* $\frac{p}{n}$ *cifre decimali.*

108. Non sempre però un dato numero, sia pure potenza ennesima esatta, è facilmente decomponibile nei suoi fattori primi: allora può determinarsene la radice ennesima applicando inversamente i principi ($a, b \ldots k$).

Si richieda $\sqrt[7]{94931877133}$

1. Il dato numero è dispari, quindi tale è pure la sua radice settima (a);

2. Detta radice non può terminare per le cifre 1, 5, 9 perchè la data potenza non termina per una di queste cifre (b), talchè la cifra della unità della radice sarà uno dei numeri 3, 7;

3. La ricercata radice è numero di due cifre poichè, staccate dalla destra del dato numero 7 cifre, cioè quante sono le unità dell'esponente (e), restano alla sua sinistra 4 cifre, che sono tante quante quelle che avrebbe la settima potenza della sua cifra delle decine considerata come cifra semplice;

4. Vedesi dalla tavola (105) che la potenza settima del 7 è numero di 7 cifre, mentre quella settima del 3 è numero di 4 cifre, quante cioè ne sono residuate alla sinistra del dato numero; ne dedurremo che la cifra delle decine della radice è il 3;

5. Si vede nella stessa tavola che la potenza settima delle cifre semplici, la quale ha le stesse unità 3 del dato numero, è $7^7 = 823543$, ne dedurremo che la

cifra delle unità della radice è il 7 (*c*): ossia che

$\sqrt[7]{94931877133} = 37$, come trovasi a riprova elevando 37 alla settima potenza.

109. *Quando la radice ricercata ha più di due cifre, allora dopo di aver determinato nel descritto modo la sua cifra di ordine più elevato e quella delle sue unità, si procede alla determinazione delle cifre intermedie, come dai seguenti esempi :*

1. Si ricerchi $\sqrt[5]{5030919566507}$

1. Decomposto il numero in gruppi di due cifre trovasi che ne contiene più di 5, ossia più delle unità del dato esponente; ciò indica che la radice quinta del numero si forma di più di due cifre. Si torni a decomporre il numero in gruppi di tre cifre; trovasi che ne contiene 4, più uno incompleto; ne dedurremo che la chiesta radice è numero di 3 cifre;

2. La cifra di ordine più elevato della radice essendo le centinaia, la sua quinta potenza, oltre alle cifre spettanti alla potenza quinta della sua prima cifra a sinistra, avrà 10 cifre di più, per essere 2 gli zeri delle centinaia e 5 il dato esponente; e però dalla destra del dato numero si stacchino, mediante la virgola 10 cifre, scrivendo 503,0919566507, e le residuali tre cifre alla sinistra del numero, sono tante quante quelle della quinta potenza della sua cifra di ordine più elevato considerata come numero semplice

3. Risulta dalla tavole (105) che la quinta po-

tenza del 3 è numero di 3 cifre, quindi il 3 è la cifra della centinaia della radice.

4. Poichè la data potenza quinta termina per 7, anche la cifra delle unità della sua radice sarà 7 (*c*).

5. La determinazione della cifra delle decine si effettua per tentativi come segue: Suppongasi che detta cifra sia 5, ossia che la radice sia 357. Elevato a quinta potenza il 350, ciò che si effettua facendo seguire da cinque zeri la quinta potenza del 35, risulta $\overline{350}^5 > 5030919566507$: allora si diminuisca il 5 di una unità; poichè trovasi che $\overline{340}^5$ è contenuto nel dato numero, riterremo 4 come cifra delle decine; ed infatti si rinviene a riprova $\overline{347}^5$ uguale al dato numero, e perciò

$$\sqrt[5]{5030919566507} = 347.$$

2. In modo analogo si opera se la ricercata radice si forma di un numero maggiore di cifre; ne diamo un esempio per un numero decimale.

Si chieda $\sqrt[5]{286138{,}1721051424}$

1. Si consideri il numero come intero; decomposto in gruppi di tre cifre trovasi che ne contiene più di 5, unità dell'esponente; allora si torni a decomporre in gruppi di 4 cifre, e poichè ne contiene quattro, più uno incompleto, vedesi che la radice è numero di di quattro cifre.

2. Sempre considerando il numero come intero ed operando come sopra, si trova che 1 e la cifra delle migliaia della radice, e 4 è la cifra della sua unità.

3. Si adotti per le centinaia della radice una cifra

arbitraria, ad ipotesi 3; talchè la radice avrebbe 13 centinaia.

Si aggiungano 10 zeri alla destra della quinta potenza del 13, essendo 2 gli zeri delle centinaia e 5 l'esponente. Poichè risulta $\overline{1300}^5$ maggiore del dato numero, si diminuiscano le centinaia di una unità, e siccome $\overline{1200}^5$ è contenuto nel dato numero, riterremo 2 come cifra delle centinaia della radice.

4. Supposto 5 cifra delle decine, si trova che $\overline{1250}^5$ è di molto superiore al dato numero, allora si riduca il 5 anche più di una unità, così ad ipotesi si provi il 3; e poichè si rinviene che $\overline{1230}^5$ è contenuto nel dato numerò, si ritiene il 3 come cifra delle decine. Trovasi infatti a riprova che $\overline{1234}^5$ riproduce il dato numero.

5. Ma il dato numero ha dieci cifre decimali, e siccome 5 è l'esponente della radice, questa avrà $\frac{10}{5} = 2$ cifre decimali (k) e perciò

$$\sqrt[5]{286138,1721051424} = 12,34.$$

110. *Se la potenza della quale si ricerca la radice è frazione decimale, si opera sul numero espresso dalle sue cifre significative considerato come intero; e dalla destra della radice ottenuta, mediante la virgola, si distaccano tanti decimali quante sono le unità del quoto ottenuto dividendo il numero delle cifre decimali della data potenza per l'esponente della radice* (k). *Ad esempio:*

Si voglia $\sqrt[5]{0,0000000243}$; faremo $\sqrt[5]{,243} = 3$, e

poichè sono dieci i decimali della potenza e 5 è l'esponente, così la radice avrà $\frac{10}{5} = 2$ cifre decimali. Quindi $\sqrt[5]{0{,}0000000243} = 0{,}03$.

111. *Sè le cifre significative della data potenza frazionaria costituiscono un numero decomponibile in fattori primi, allora considerandolo come intero, si opera come al* (107, 1°), *dotando poi la radice ottenuta delle volute cifre decimali come si è detto.* Così, per $\sqrt[5]{0{,}0000007776}$; trovasi $7776 = 2^5 \times 3^5$, da cui $\sqrt[5]{7776} = 2 \times 3 = 6$; e siccome sono dieci le cifre decimali della data potenza e 5 esponente della radice, sarà $\sqrt[5]{0{,}0000007776} = 0{,}06$ (k).

112. Risulta dai superiori esempi che si può sempre estrarre con esattezza la radice ennesima di un numero che sia potenza ennesima esatta, sia esso intero frazionario o fratto: non è però così *per i numeri primi che siano assunti come potenze ennèsime, nè per tutti quei numeri non primi che non sono affetti dallo stesso esponente della chiesta radice.* In tali casi l'estrazione della radice ennessima si effettua per tentativi; e nella maggior parte dei casi *la radice ottenuta risulta numero irrazionale*, ossia essa non è rigorosamente esatta.

1. Si domandi $\sqrt[5]{5}$. Col metodo aritmetico si

estragga $\sqrt[4]{5} = \sqrt{\sqrt{5}} = 1{,}4953$. Si estragga inoltre $\sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = 1{,}3076$. Evidentemente $\sqrt[5]{5}$ è compresa tra $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[6]{5}$, ossia fra i numeri 1,4953 e 1,3076.

Suppongasi $\sqrt[5]{5} = 1{,}35$, elevando a potenza trovasi $\overline{1{,}35}^5 = 4{,}4348 < 5$; dovrà però scegliersi un numero maggiore; sia questo 1,38 e poichè si rinviene, con grande approssimazione, $\overline{1{,}38}^5 = 5$, si adotterà come radice quinta di questo numero.

2. Si domandi $\sqrt[5]{38880}$: Decomposto nei suoi fattori primi trovasi $38880 = 2^5 \times 3^5 \times 5$, e però $\sqrt[5]{38880} = 2 \times 3 \times \sqrt[5]{5}$; talchè, determinata come sopra $\sqrt[5]{5} = 1{,}38$, ne trarremo con approssimazione $\sqrt[5]{38880} = 2 \times 3 \times 1{,}38 = 8{,}28$.

113. Nella pratica l'indicato modo di estrazione della radice ennesima di un numero primo, o che non sia potenza ennessima esatta, può talora divenire troppo laborioso; per facilitarlo possono usarsi utilmente le tavole delle potenze di esponente primo dei numeri naturali.

Sia il seguente un frammento della tavola delle quinte potenze dei numeri di cinque cifre, e si richieda a quattro decimali $\sqrt[5]{7}$.

Si rileva dalla tavola che la potenza quinta dei numeri di 5 cifre, la quale più si approssima al 7000000.....

Numeri	Potenze di esponente dispari			
	3ª	5ª	7ª	11ª
14757	»	68982648633287746 5557	»	»
14758	»	699967225766434252768	»	»
14759	»	700280025629711289219	»	»
14750	»	700538144033737610000	»	
»	»	» »	»	

è $\overline{14758}^5 = 699967225766434252768$, e però con grande approssimazione $\sqrt[5]{70000..} = 14758$, da cui a 4 decimali $\sqrt[5]{7} = 1{,}4758$. Lo stesso numero dà a 3 decimali $\sqrt[5]{699967} = 14{,}758$, e a 2 decimali $\sqrt[5]{6999672257} = 147{,}58$ ecc.

Gruppi radicali

114. Un numero p che non sia potenza ennesima esatta, può risultare formato della somma o differenza di due o più potenze ennesime esatte. In tal caso le radici ennesime delle potenze che per somma o differenza riproducono il numero p, costituiscono un gruppo che diremo *radicale ennesimo* del numero p.

Così, sia $d^n = a^n + b^n - c^n$ e le radici $+a$ » $+b$ » $-c$ formano il *gruppo radicale* ennesimo del numero d^n.

Ciò si esprime scrivendo $\sqrt[n]{d^n} = \bigwedge_n \underline{+a \text{ » } +b \text{ » } -c.}$

Elevando a potenza il gruppo, faremo

$$\bigwedge_{n} \overline{+a \,»\, +b \,»\, -c}^{\,n} = a^n + b^n - c^n = d^n.$$

Si osservi che nel gruppo radicale: *i termini* a, b, c *non sono legati nè per somma nè per differenza alla formazione della radice ennesima del dato numero ma stanno solo ad indicare come elevati ciascuno alla potenza ennesima presa secondo il rispettivo segno, riproducono quel numero.*

115. L'uso dei gruppi radicali si utilizza nel calcolo geometrico in specie, come parzialmente vedremo in seguito.

Diamo alcuni esempii numerici sui gruppi radicali.

1. Si chieda $\sqrt[5]{16839}$. Si vede dalla tavola (105) delle potenze, che quella la quale più si appossima per difetto al dato numero è $7^5 = 16807$, e però faremo $16839 - 16807 = 32$; ma rilevasi dalla stessa tavola che $32 = 2^5$; quindi $16839 = 7^5 + 2^5$; e sotto forma di gruppo radicale $\sqrt[5]{16839} = \bigwedge_{5} \overline{+7 \,»\, +2.}$ Elevando a potenza il gruppo, trovasi

$$\bigwedge_{5} \overline{+7 \,»\, +2}^{\,5} = 7^5 + 2^5 = 16807 + 32 = 16839.$$

2. Si domandi $\sqrt[5]{16775}$. Vedasi dalla tavola che la potenza quinta, la quale più si approssima per e

cesso al dato numero, è $7^5 = 16807$: quindi $16807 - 16775 = 32 = 2^5$; e però sotto forma di gruppo radicale $\sqrt[5]{16775} = \bigwedge_5 \underline{+7 \,»\, -2.}$ Elevando a potenza $\bigwedge_5 \overline{\underline{+7 \,»\, -2}}^5 = 7^5 - 2^5 = 16807 - 32 = 16775.$

3. Il gruppo radicale può risultare frazionario. Si voglia $\sqrt[5]{3130}$; poichè $5^5 = 3125$, faremo $3130 - 3125 = 5$, e come al (112.1°) trovato $\sqrt[5]{5} = 1{,}38$, ne trarremo il gruppo radicale $\sqrt[5]{3130} = \bigwedge_5 \underline{+5 \,»\, +1{,}38.}$ Elevando a potenza trovasi $5^5 + \overline{1{,}38}^5 = 3125 + 5 = 3130.$

4. Per $\sqrt[5]{3120}$ avremo $3125 - 3120 = 5$; e però $\sqrt[5]{3120} = \bigwedge_5 \underline{+5 \,»\, -1{,}38.}$ Elevando a potenza $5^5 - \overline{1{,}38}^5 = 3125 - 5 = 3120.$

5. Il gruppo radicale può essere fratto. Si chieda $\sqrt[5]{7}$. Poichè $7 = 5 + 2$, trovato come al (112, 1°) che

$\sqrt[5]{5} = 1{,}380$ e $\sqrt[5]{2} = 1{,}158$, faremo

$\sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{+1{,}38 \,»\, +1{,}158.}$ Elevando a potenza

$\overline{1.380}^5 + \overline{1{,}158}^5 = 5 + 2 = 7.$

6. Il dato numero sia frazionario. Si voglia

$\sqrt[5]{42{,}00005.}$

La parte intera è $32 = 2^5$. La parte fatta contiene tanti decimali quante sono l'unità dell'esponente 5, essa è perciò di per sè stessa potenza quinta. Trovasi

$\sqrt[5]{5} = 1{,}38$, quindi $\sqrt[5]{0{,}00005} = 0{,}138$; e sotto forma

di gruppo radicale $\sqrt[5]{32{,}00005} = \sqrt[5]{+2 \,»\, +0{,}138.}$

Elevando a potenza $2^5 + \overline{0{,}138}^5 = 32{,}00005.$

116. Le differenze fra le potenze successive dello stesso grado di due numeri quando sia nota la differenza di questi, offrono anche un modo di estrazione della radice ennesima di uno di essi.

Come a lato siano $a < b$ due numeri e d_1 la loro differenza: disposte sotto ciascun numero in colonna verticale le sue potenze successive, da una coppia di grado n di tali potenze può calcolarsi la differenza fra i termini della coppia successiva di grado $n + 1$. Trovasi infatti $d_2 = ad_1 + bd_1$ » $d_3 = a^2d_1 + bd_2$ » $d_4 = a^3d_1 + bd_3$ ecc.

$$\boxed{\begin{array}{l} a - b = d_1 \\ a^2 - b^2 = d_2 \\ a^3 - b^3 = d_3 \\ a^4 - b^4 = d_4 \\ a^5 - b^5 = d_5 \\ a^6 - b^6 = d_6 \end{array}}$$

117. Sia richiesta $\sqrt[5]{a^5}$. Determinata una potenza dello stesso grado b^5 che sia di maggior valore della proposta a^5, si faccia la differenza $d_5 = b^5 - a^5$. Per il sopra esposto avremo $bd_5 + d_1a^5 = d_6$ (A), da cui $d_6 - b^6 = a^6$, e $\frac{a^6}{a^5} = a$. Ma nella formula (A) la quantità d_1 è ignota e deve determinarsi per tentativi.

Ad esempio si domandi $\sqrt[7]{823543}$.

Come a lato si formino tre caselle A, B, D.

Nella prima A si scriva il dato numero 823543.

In linea nella casella B si segni $10^7 = 10000000$, ovvero altra potenza settima arbitraria purchè maggiore di quella data. Nella casella D, ed in linea, si scriva la

A	B	D
5764801 ; 823543 = 7	10000000	91764570
	100000000	2470629
	94235199	94285109
$\sqrt[7]{823543} = 7$,	5764801	

differenza $\overline{10}^7 - 823543 = 91764570$, aggiungendo alla sua destra un zero. Nella casella B sotto $\overline{10}^7$ si scriva $\overline{10}^8$.

Passando quindi alla ricerca per tentativi della radice, faremo le seguenti considerazioni.

1. Poichè $\overline{10}^7$ di radice 10 è numero maggiore di quello dato, la radice settima di questo è numero di una sola cifra.

2. Tale numero è dispari, poichè la potenza data è dispari (*a*).

3. Suppongasi 3 differenza fra $10 = \sqrt[7]{10^7}$ e questo numero

4. Il prodotto $3 \times 823543 = 2470629$ si sommi nella casella D con la differenza 91764570, ed il totale ottenuto 94235199 si sottragga nella casella A dal $\overline{10}^8$: questo resto 5764801 si scriva in linea a sinistra del dato numero nella casella A.

5. Si faccia il quoto $5764801 : 823543 = 7$. Questo quoto sarà radice settima del dato numero, sè veramente risulta esatta l'ipotetica differenza 3, tra il 10 e la radice ricercata.

6. A verifica si elevi a settima potenza il quoto ottenuto 7, che nel caso risulta radice esatta trovandosi $7^7 = 823543$; ma qualora si fosse rinvenuto un numero maggiore o minore di quello dato, si sarebbe diminuita o accresciuta di una unità l'ipotetica differenza 3, per rinvenire la vera radice.

Lo svolto metodo non è in pratica il più semplice e conveniente; lo abbiamo unicamente esposto, inquantochè si applica con vantaggio alle serie triangolari differenziali (70, 71); come sarà facile verificare agli studiosi.

118. Facciamo finalmente osservare una proprietà comune alle potenze dello stesso grado dei numeri progredenti in serie aritmetica secondo una data ragione, senza trattenerci sui principii che generano detta proprietà, nè sui vantaggi prattici che possono ricavarsene nella estrazione della radice ennesima di un numero, costretti a troncare questa già troppo lunga digressione.

119. **Caratteristica potenziale differenziale e multipla.**

Come a lato in A, B, C, una serie di numeri interi o frazionari decimali si disponga in linea orizzontale.

Sotto ciascun numero si scrivano le rispettive potenze dello stesso grado.

Sotto ciascuna potenza si scriva la sua differenza da quella che la precede.

Numeri	1	2	3	4	5	6	7	8 ...	A)
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64 ...	
Diff. 1ª		3	5	7	9	11	13	15	
Idem 2ª			2	2	2	2	2	2	Car. diff. quadra
Numeri	11	12	13	14	15	16	17 ...		B)
Quadrati	121	144	169	196	225	256	289		
Diff. 1ª		23	25	27	29	31	33		
Idem 2ª		2	2	2	2	2	2		Car. diff. quadra
Numeri	1,21		1.22		1,23		124 ...		C)
Quadrati	1,4641		1,4884		1,5129		1,5376		
Dif. 1ª			0,0243		0,0245		0,0247		
Idem 2ª					0,0002		0,0002		Car. differ. quadra fraz.

Sotto ciascuna differenza così ottenuta si scriva la differenza tra essa e quella che la precede, e così si pro-

segua togliendo da ciascuna delle ultime differenze ottenute quella che la precede. Quando ciò siasi ripetuto tante volte quante sono le unità dell'esponente comune alle potenze sulle quali si opera, si giunge ad una *equidifferenza costante* per due termini successivi delle serie.

Tale equidifferenza diciamo *caratteristica potenziale differenziale*, inquantochè essa *è costante per le potenze dello stesso grado, e diversa per potenze di diverso grado.*

La caratteristica potenziale differenziale, diversifica per potenze di numeri progredenti in diversa ragione.

a) Negli esempi A, B, C vedesi come, fatta per due volte successive la differenza dei quadrati dei numeri procedenti in ordine naturale, tante essendo le unità dell'esponente 2 del quadrato, si trova l'equidifferenza *2*, la quale è perciò la *caratteristica potenziale quadra.*

Essa sarà intera o frazionaria decimale, secondochè siano intere o frazionarie decimali le potenze dalle quali proviene.

b) Negli esempi seguenti D, E, F, si vede come fatta per tre volte successive la differenza dei cubi dei numeri in progressione naturale, si giunge alla equidifferenza *6*, la quale perciò è la *caratteristica potenziale differenziale cubica.*

c) In modo analogo può operarsi per determinare la caratteristica potenziale per qualunque grado di potenze dei nemeri progredenti in ordine naturale.

120. È facile determinare la caratteristica differenziale di grado n, inquantochè essa si forma del prodotto $n \times n - 1$.

Avremo cioè:

Caratt. prima $= 1$; Id. quadra $1 \times 2 = 2$; Id. cubica » $2 \times 3 = 6$; Id. quarta » $6 \times 4 = 24$; Id. quinta » $24 \times 5 = 120$; Id. sesta $120 \times 6 = 720$, e così in proseguo.

Numeri	1	2	3	4	5	6	7	D)
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	
Diff. 1ª		7	19	37	61	91	127	
Idem 2ª			12	18	24	30	36	
Idem 3ª				6	6	6	6	Caratteristica diff. cubica
					»	»	»	
Numeri		11		12	13	14	15	E)
Cubi		1331		1728	2197	2744	3375	
diff. 1ª				397	469	547	631	
Idem 2ª					72	78	84	
Idem 3ª						6	6	Caratteristica diff. cubica
Numeri	1,21	»	1,22	»	1,23	» 1,24	» 1,25	F)
Cubi	1,771561	»	1,815848	»	1,860867	» 1,906624	» 1,953125	
diff. 1ª			0,044287	»	0,045019	» 0,045757	» 0,046501	
Idem 2ª					0,000732	» 0,000738	» 0,000744	
Idem 3ª						0,000006	» 0,000006	Car. differ. cubica fraz.

Diremo naturale la serie *1, 2, 6, 24, 120, 720* . . . . della caratteristica differenziale delle potenze successive dei numeri in ordine naturale.

121. *La caratteristica differenziale delle potenze dei numeri in progressione aritmetica di ragione* r, *per le successive potenze, si forma del prodotto di quella naturale corrispondente per la potenza di* r *dello stesso grado.* Così

Per la progressione aritmetica dei numeri ÷ 1 · 3 · 5 · 7 · 9 . . . . di ragione 2, la corrispondente caratteristica differenziale sarà car. diff. prima $1 \times 2 = 2$ » Id. quadra $2 \times 4 = 8$ » Id. cubica $6 \times 8 = 48$ » Id. quarta $24 \times 16 = 384$ ecc.

Per la progressione aritmetica di ragione 3 dei numeri ÷ 1 · 4 · 7 · 10 · 13 · 16 . . . . sarà car. diff. prima $1 \times 3 = 3$ » Id. quadra $2 \times 9 = 18$ » Id. cubica $6 \times 27 = 162$ » Id. quarta $24 \times 81 = 1944$ ecc.

122. Come nella seguente tavola si disponga una serie di numeri in ordine naturale, e sopra ciascuno si scriva il suo prodotto per quello accumulato dei numeri che lo precedono. Per quanto si è detto (119), i prodotti successivi ricostituiscono la serie naturale della caratteristica differenziale.

Caratt. differ.	Grado	Caratteristica multipla						
		1	2	6	24	120	720	5040
1	1ª	1 »	2 »	3 »	4 »	5 »	6	7
2	2ª	1 »	4 »	9 »	16 »	25 »	36 »	49
6	3ª	1 »	8 »	27 »	64 »	125 »	216 »	343
24	4ª	1 »	16 »	81 »	256 »	625 »	1296 »	2401
120	5ª	1 »	32 »	243 »	1024 »	3125 »	7776 »	16807
720	6ª	1 »	64 »	729 »	4096 »	15625 »	46656 »	117649

In colonna verticale sotto ciascun numero si scrivano le sue potenze successive. Per questa disposizione le potenze dello stesso grado dei numeri trovansi disposte in linea orizzontale.

Rapporto ad uno dei termini della colonna verticale delle potenze di un numero, diciamo *caratteristica potenziale multipla* il prodotto segnato sopra di esso e proveniente dalla sua moltiplicazione per il prodotto accumulato dei numeri che lo precedono.

123. *La caratteristica potenziale multipla di un termine qualunque della tavola il quale sia potenza di grado* n, *è radice ennesima del suo prodotto per quello accumulato delle potenze di ugual grado che lo precedono in linea orizzontale nella tavola stessa.*

Ad esempio: $3^5 = 243$ ha per caratt. diff. 120, e per caratteristica multipla 6, ed avremo $6 = \sqrt[5]{1 \times 32 \times 243}$: $7^3 = 343$ ha per caratt. diff. 6 e per caratt. multipla 5040 ed avremo

$$5040 = \sqrt[3]{1 \times 8 \times 27 \times 64 \times 125 \times 216 \times 343}.$$

CAPITOLO II.

Formazione delle potenze di una data quantità geometrica

124. *Nella progressione delle potenze di un numero, il rapporto che passa tra due termini successivi è quello stesso che passa fra l'unità ed il primo termine della progressione.*

Sopra questo principio si basano i vari modi grafici, per costruire la serie delle potenze di una data quantità geometrica.

Nei numeri l'unità si considera in astratto, ma per una quantità geometrica rappresentata da una figura, l'unità della specie alla quale si riferisce, deve essere nota e determinata, potendosi attribuire alla figura stessa diverse dimensioni rapporto a diverse unità.

125. 1. (Fig. 22ª A, B). Sia oR unità lineare, $o1$ un segmento del quale si domanda la serie delle potenze lineari.

Dal vertice e sopra un lato dell'angolo arbitrario doa, si porti l'unità oR, e sull'altro il dato segmento $o1$, tracciando la $R1$: preso $o1' = o1$ si tracci la $1'2$ parallela alla $R1$: fatto $o2' = o2$ si tracci la parallela $2'3$ alla $R1$. Cosi procedendo si avrà nei segmenti $o1$, $o2$, $o3$, $o4 \ldots . on$ la progressione delle potenze lineari di quello dato $o1$.

Infatti, per le parallele abbiamo $Ro : o1 :: o1 : o2$, ed essendo $Ro = 1$ sarà $o2 = \overline{o1}^2$: Così
$oR : o1 :: o2' : o3$, ossia $o3 = o2 \times o1 = \overline{o1}^2 \times o1 = \overline{o1}^3$ ecc.

2. (Fig. 23ª A, B) Si domandi la progressione delle potenze lineari del segmento $o1 \gtreqless 1$. (A), ovvero $o1 \gtreqless 2$. (B), essendo oc unità lineare. Sul segmento $o1$ come base, e l'unità come lato, si costruisca l'isoscele $oc1$; si abbassi al lato oc prolungato la perpendicolare $1h'$ e si faccia $h'2 = ho$; si tracci la 12, la 23 parallela alla $c1$, la 34 parallela alla 12 ecc.; ed avremo coi segmenti crescenti

o decrescenti *o1, o2, o3, o4 . . . ., on,* la serie delle potenze lineari del segmento *o1* (A, B).

Infatti, per i triangoli isosceli simili *oc1, O12, o23. . . .* abbiamo : *co* : *o1* :: *o1* : *o2*, ossia *1* : *o1* :: *o1* : *o2*, quindi $o2 = \overline{o1}^2$, ed anche *oc* : *o1* :: *o2* : *o3* e però $o3 = \overline{o1}^3$ ecc.

a) Consegue che, *in un triangolo isoscele se si adotta il lato come potenza di esponente* n, *di un segmento* s *compreso tra 0 e 2, la base è potenza di esponente* n + 1 *dello stesso segmento.*

Così nel triangolo *o23*, se si assegna al lato *o2* il valore s^2, sarà $o3 = s^3$. Se si ritiene $o2 = s^4$, sarà $o3 = s^5$: ossia il rapporto $\frac{o2}{o3}$ è quello che passa fra due termini successivi qualunque della progressione delle potenze del segmento *s*. Pertanto nell'isoscele il rapporto tra il lato e la base varia coll'altezza del triangolo; talchè, sulla base *o1* può costruirsi una serie infinita di isosceli di diversa altezza, e perciò di diverso rapporto tra il lato e la base. Ciascun lato dei triangoli delle serie può ritenersi arbitrariamente come unità lineare, ossia come raggio unitario di un circolo descritto dal vertice, del quale la base *o1* è corda; consegue che la corda *o1*, riferita alla unità, cangia di valore col cangiare del rapporto tra il lato unitario e la base del triangolo isoscele adottato. Resta con ciò confermato che per la determinazione grafica delle potenze di una quantità geometrica, necessita la cognizione del rapporto tra questa e l'unità della specie. Facilmente si comprende come per la determinazione del detto rapporto, del triangolo isoscele

adottato nella serie, oltre la base $o1$, basta conoscere un altro elemento capace di determinarlo, come l'angolo al vertice, o alla base, l'altezza ecc.

3. (Fig. 24ª A) Nel circolo di raggio unitario co si voglia costruire la serie delle potenze lineari della corda $o1' < (co = 1)$.

La doppia proiezione oh della corda $o1'$, dà $o2' = \overline{o1'}^2$.

Si faccia corda $o2 = o2'$ e si abbassi la doppia perpendicolare $o3'$ alla $21'$. Nel triangolo iscritto $2o1'$ abbiamo $o3' = o2 \times o1' = o2' \times o1 = \overline{o1'}^2 \times o1 = \overline{o1'}^3$. Si faccia corda $o3 = o3'$ e si abbassi alla $31'$ la doppia perpendicolare $o4'$; avremo $o4 = o3 \times o1 = \overline{o1'}^3 \times o1 = \overline{o1'}^4$ e così proseguendo, formeremo la serie decrescente delle potenze lineari della data corda $o1$, $o2$, $o3$, $o4 \ldots$ on.

a) (Fig. 24ª B) Quando la corda iniziale oa_1, della quale vogliansi costruire le potenze lineari, è maggiore del raggio $co = 1$, e minore del lato del quadrato iscritto $ad = \sqrt{2}$, allora la serie delle sue potenze è crescente, e può essere avanzata finchè uno dei suoi termini non superi il diametro $os = 2$, ossia il quadrato della corda $ad = \sqrt{2}$. Quindi con l'approssimarsi della corda iniziale oa alla lunghezza del lato del quadrato ad, diminuisce il numero dei termini della serie delle sue potenze lineari determinabili con la esposta costruzione grafica.

b) (Fig. 24ª B) Quando la corda iniziale è maggiore del lato del quadrato iscritto, per formarne la serie

delle potenze lineari, deve dividersi per la potenza del 10 capace di dare un quoto minore del raggio $co = 1$. Ad esempio: si vogliano costruire le potenze di un segmento lineare $s > \sqrt{2}$, e si trovi $\frac{s}{10} = o1'$: costruita come sopra (A) la serie decrescente delle potenze di questa corda, $o1$, $o2$, $o3$, $o4$ . . . ., moltiplicando un termine della serie di grado n per la potenza del 10, divisore di s dello stesso grado n del termine, nè resterà formato il termine corrispondente nella progressione delle potenze del segmento s. Avremo cioè $o1 = \frac{s}{10}$ » $o2 = \frac{s}{100}$ » $o3 = \frac{s}{1000}$ ... che daranno la serie richiesta facendo

$s = o1 \times 10$ » $s^2 = o2 \times 100$ » $s^3 = o3 \times 1000$ . . . ecc.

Infatti, per ipotesi segmento $s = o1 \times 10$; elevando a quadrato e per essere $\overline{o1}^2 = 02$, avremo $\overline{s}^2 = o2 \times 100$; elevando a cubo, ossia moltiplicando per $s = o1 \times 10$, e per essere $o3 = \overline{o1}^3$, avremo $s^3 = o3 \times 1000$ . . . . così in proseguo.

c) Nella esposta costruzione è da osservarsi che angolo $co3' = 11'2$, angolo $co4 = 11'3$ ecc. per avere queste coppie di angoli i lati scambievolmente perpendicolari, e perciò l'angolo che forma il raggio co con un segmento potenza di grado n della serie, è uguale a quello che la base $11'$ del triangolo isoscele, che ha per lato la corda iniziale $o1$, forma con la potenza di grado $n - 1$, portata come corda del circolo dall'estremo o del raggio.

d) 2 Per le doppie perpendicolari $o2'$, $o3'$, $o4'$ . . . . è evidente che i punti $2', 3', 4'$ . . . . n si trovano sulla circonferenza di centro $1'$ e di raggio $1'o$, ovvero di raggio $a_1.o$ e di centro a_1.

125*bis*. **Costruzione delle serie delle potenze lineari di esponente 2^n di un dato segmento.**

(Fig. 25ª) Nel circolo di raggio $ca = 1$ e dall'estremo del diametro, si faccia corda ao uguale al raggio, prolungandola. Si domandino le potenze lineari di esponente 2^n di un segmento $a1 < ca$ raggio. Si abbassi al diametro ad la perpendicolare oh e presa corda $a1'$ uguale al dato segmento, la perpendicolare $1'n$ interseca in 2 il raggio ao. Si faccia corda $a2' = a2$ e la perpendicolare $2'n'$ interseca in 3 la ao. Si faccia $a3' = a3$, e la perpendicolare $3'n''$ interseca in 4 la ao; e così proseguasi. Avremo la serie $a1 \,»\, a2 \,»\, a3 \,»\, a4 \ldots\, an$ e cioè $a1 \,»\, \overline{a1}^2 \,»\, \overline{a1}^4 \,»\, \overline{a1}^8 \ldots$, e sè il segmento $a1$ è potenza ennesima di altro segmento s, ad ipotesi $a1 = s^3$, sarà $a2 = s^6 \,»\, a3 = s^{12} \,»\, a4 = s^{24}$ ecc.

Infatti, nel triangolo rettangolo aho avente per ipotenusa il raggio, questo è doppio della sua proiezione o cateto ah, e però i triangoli rettangoli simili $an2$, $an'3$, $an''4$ hanno l'ipotenusa doppia della rispettiva proiezione; ma la doppia proiezione di una corda sul diametro da un suo estremo è quadrato della corda, e perciò prolungati ad incontrare la circonferenza in $1'$, $2'$, $3'$, $4' \ldots$ i cateti perpendicolari $n2$, $n3$, $n4$, e poichè $a2 = a2'$, $a3 = a3' \ldots$ avremo $\overline{a1}^2 = 2.an = a2 \,»\, \overline{a2}^2 = 2.an' = a3 \,»$ $»\, \overline{a3}^2 = 2.an'' = a4$ e così in proseguo: ossia nelle serie $a1$, $a2$, $a3$, $a4 \ldots\, an$ ciascun termine è quadrato del precedente e radice del seguente, e formano così la serie $a1\ \overline{a1}^2\ \overline{a1}^4\ \overline{a1}^8 \ldots\ \overline{a1}^{2n}$. Quando poi il primo termine fosse $\overline{a1}^n$ avremo la serie $\overline{a1}^n \,»\, \overline{a1}^{2n} \,»\, \overline{a1}^{4n} \,»\, \overline{a1}^{8n}$ (Aritmetica elementare).

a) Una serie decrescente come la descritta, è illimitata ed i suoi termini possono avanzarsi finchè sia graficamente possibile.

b) Sè poi la corda iniziale è maggiore del raggio *1* la serie è crescente, e col metodo descritto può solo essere avanzata fino a quel termine che più si approssima, e non sia maggiore del quadrato 4 del diametro.

(Fig. 25ª) Sia primo termine $ab > ao$, e la perpendicolare bh' al diametro prolungato ad incontrare la direzione ao in b'. Si faccia $ae = ab'$ e si tracci ee' parallela alla $b'h'$; si faccia $af = ae'$ e si tracci ff' parallela alla $b'h'$ ». Poichè $af' > ad$ diametro la serie crescente non può avanzarsi, e per il già dimostrato avremo ab » $ab' = \overline{ab}^2$ » $ae' = \overline{ab}^4$ » $af' = \overline{ab}^8 \ldots.$ e sè il primo termine è $\overline{ab}^n$ sarà $\overline{ab}^n$ » $\overline{ab}^{2n}$ » $\overline{ab}^{4n}$ » $\overline{ub}^{8n}$.

c) Quando vogliasi un termine più avanzato nella serie, o anche quando il primo termine è segmento maggiore del diametro $ad = 2$, allora si divide il valore del primo termine per la potenza del 10^n capace di dare un quoto lineare $q < 1$. Si forma la progressione decrescente del quoto q nel modo suddetto, per poi moltiplicarne i termini successivi per la potenza del 10^n dello stesso esponente del termine moltiplicando, la progressione dei prodotti sarà quella del segmento dato. Così si domandino le potenze lineari di esponente 2^n del segmento $s = 10.\ a1$. Fatta corda $a1' = \frac{s}{10}$ e formata come sopra la serie $a1,\ a2,\ a3,\ a4 \ldots. an$, ne trarremo quella del segmento s, facendo $10 \times a1 = s$ » $\overline{10}^2 \times a2 = s^2$ » » $\overline{10}^4 \times a3 = s^4$ » $\overline{10}^8 \times a4 = s^8$ ecc.

126. **Costruzione grafica delle potenze di una data area.**

a) *Elevando a quadrato i termini successivi della progressione delle potenze di un numero, si forma la progressione delle potenze del quadrato di quel numero* (Aritmetica elementare).

b) *L'area di qualsiasi figura piana geometricamente misurabile, può graficamente ridursi a quadrato ad essa equivalente* (Geometria elementare).

Sopra questi due principii si fonda la costruzione grafica delle potenze di una data area.

1. (Fig. 22-23ª A-B) Si voglia costruire una serie di figure piane delle quali le aree procedano come le potenze dell'area di una figura iniziale.

Si riduca la figura iniziale al quadrato equivalente del quale per ipotesi sia lato ossia radice *o1*. Come al (125, 1°.2°) si costruiscano le potenze lineari successive dal lato *o1* formando la serie *o1*, *o2*, *o3* .... *on* sopra ciascun termine della serie come lato si costituisca il quadrato, formando la serie $\overline{o1}^2$ » $\overline{o2}^2$ » $\overline{o3}^2$ .... $\overline{on}^2$ e per il sopracitato principio (*a*), le aree dei quadrati successivi procederanno come le potenze di quello iniziale di lato *o1*. Nei modi geometrici si riduca ciascun quadrato ad una figura piana di qualunque forma, purchè di area ad esso equivalente, e ne resterà formata la richiesta serie di figure piane di aree procedenti come le potenze di quella della data figura iniziale.

2. In modo analogo si costruisce una serie di figure piane delle quali le aree procedano come le potenze 2^n dell'area di una figura iniziale data.

(Fig. 25ª) Si riduca la figura iniziale data al quadrato equivalente che abbia per ipotesi *a*1 come lato

ossia radice. Si formi la serie delle potenze lineari di esponente 2^n del segmento $a1$, cioè $a1$, $a2$, $a3$ .... an. Sopra ciascun termine della serie come lato si costruisca il quadrato formando la serie $\overline{a1}^2$, $\overline{a2}^2$, $\overline{a3}^2$, $\overline{a4}^2$ e poichè $a1$, $a2$, $a3$, $a4 = a1$, $\overline{a1}^2$, $\overline{a1}^4$, $\overline{a1}^8$ è progressione nella quale ogni termine è quadrato del precedente e radice del seguente, così sempre per lo stesso principio (a) i quadrati dei termini daranno $\overline{a1}^2$, $\overline{a1}^4$, $\overline{a1}^8$, $\overline{a1}^{16}$: progressione nella quale ciascun termine è pure quadrato del precedente e radice del seguente, e perciò formata di termini procedenti come le potenze di esponente 2^n di quello iniziale $\overline{a1}^2$. Riducendo i quadrati della serie in figure piane equivalenti, le arce di queste procederanno come le potenze 2^n dell'area iniziale data.

Tralasciamo per brevità la descrizione di altri modi grafici che dà la geometria per la costruzione di figure procedenti come le potenze di una data figura iniziale.

127. **Formazione delle potenze angolari.**

Le potenze di un angolo graficamente costruibile, si formano determinando quelle del numero esprimente in gradi e parti di grado il suo valore. Così per le potenze dell'angolo 3° faremo la serie numerica di potenze *3, 9, 27, 81, 243*.... che riducesi angolare scrivendo angoli *3°*, *9°*, *27°*, *81°*, *243°*.... quali angoli, descritta la circonferenza, si costruiscono in successione l'uno dell'altro nei modi noti geometrici.

128. Quando l'angolo iniziale è frazionario o fratto, si riduce al suo angolo base (10), si formano nel detto

modo le potenze di questo, e si dà come divisore a ciascun termine della serie, la potenza del *2* dello stesso grado.

Così per la serie delle potenze dell'angolo 1°,5 del quale l'angolo base è 3°, faremo

$\frac{3^\circ}{2}\ \frac{9^\circ}{4}\ \frac{27^\circ}{8}\ \frac{81^\circ}{16}\ \frac{243^\circ}{32}$ .... angoli che si costruiscono con una bisezione dell'ang. 3°, due bisezioni dell'ang. 9°, tre bisezioni dell'ang. 27° ecc.

129. Se l'angolo iniziale non è graficamente costruibile, gli angoli della serie determinati nel detto modo, si costruiscono per approssimazione, come dicemmo al (21).

CAPITOLO III.

Estrazione grafica delle radici di quantità geometriche.

Scala radicale rettilinea.

130. (Fig. 26ª) Sulla retta indefinita *as*, sia *a*1 unità lineare, si costruisca su di essa il quadrato unitario *a*1*bc*, del quale si prolunghi il lato *bc;* si faccia $a2 = ab = \sqrt{2}$ e si elevi la perpendicolare *2d*. Nel triangolo rettangolo *a2d* abbiamo $ad = \sqrt{\overline{a2}^2 + \overline{2d}^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$. Si faccia $a3 = ad$, ed elevata la perpendicolare *3h* sarà $ah = \sqrt{\overline{a3}^2 + \overline{3h}^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$, così proseguendo senza limite.

Soppressa la costruzione, la retta indefinita *as* resta divisa in segmenti *a1*, *a2*, *a3*.... *an*, che rispetto alla unità *a1*, danno le radici lineari dei numeri naturali; ossia i detti segmenti procedono come i lati dei quadrati dei quali le aree progrediscono come i numeri naturali.

Scala radicale spirale.

131. (Fig. 27ª) Sia *o1* l'unità lineare; si elevi ad essa la perpendicolare $12 = o1$, alla *o2* la perpendicolare $23 = o1$ alla *o3* la perpendicolare $34 = o1$ e così proseguasi senza limite.

Per i triangoli rettangoli successivi avremo

$o2 = \sqrt{2}$ » $o3 = \sqrt{3}$ » $o4 = \sqrt{4}$ ecc.

È evidente che sotto questa forma può darsi alla scala una maggiore estensione di quella lineare radicale.

132. Fra le lunghezze dei segmenti radicali radianti da un punto del piano e gli archi del circolo di raggio unitario, esistono delle correlazioni le ragioni delle quali non trovano luogo in questo ristretto lavoro. Tali correlazioni offrono il modo di costruire una scala rettilinea radicale di più facile lettura di quella sopra descritta.

Scala radicale rettilinea a catena circolare

(Fig. 28ª) Col diametro sulla direttrice *ab* si descriva il circolo di raggio unitario c_1, e quanti vogliansi altri circoli ad esso uguali, consecutivi e tangenti esterni

c_2, c_3, c_4. Sulla direttrice ed all'origine del diametro del circolo c_1, si segni il zero della numerazione. Sulla metà del raggio c_1o si elevi la perpendicolare $h1$ e parallelamente alla direttrice si traccino la secante ai circoli $g1k$, e la tangente comune ef.

Per numerare la scala a partire dal zero:

a) I punti di contatto della ef coi circoli, principiando da quello c_2, si segnano con numeri costituiti della somma del prodotto dell'8 per i numeri naturali successivi col numero precedentemente segnato. Faremo cioè per il circolo c_2 » $8 \times 1 + 2 = 10$ » c_3 $8 \times 2 + 10 = 26$ » » c_4 » $8 \times 3 + 26 = 50$ ecc.

b) Sulla direttrice ab i centri ed i punti di contatto dei circoli della catena si segnano ordinatamente coi quadrati dei numeri naturali; cioè $0.\ 1.\ 4.\ 9.\ 16.\ 25.\ 36...$

c) Per numerare i punti successivi d'intersezione della gk coi circoli della catena, a partire dal punto 1, aggiungeremo ordinatamente al numero precedente i numeri pari in ordine naturale, facendo $1 + 2 = 3$ » » $3 + 4 = 7$ » $7 + 6 = 13$ ecc.

d) Per completare la numerazione si opera come alla scala rettilinea semplice. Così ad esempio, per determinare $\sqrt{44}$, abbasseremo alla direttrice dal n° 43 la perpendicolare che interseca in m la circonferenza c_4, e sarà segmento $om = \sqrt{44}$.

Per la disposizione della scala, un segmento che congiunge il zero con uno dei suoi numeri, è radice e lato del quadrato di quel numero.

Non spendiamo parole per dimostrare quanto riescano utili nel calcolo e nelle operazioni grafiche le scale radicali.

133. Fra le scale sopra descritte, *la radicale rettilinea a catena* circolare si raccomanda per alcune sue speciali proprietà. Così ad esempio (Fig. 28ª): *Una secante comune ai circoli e parallela alla direttrice, taglia ciascuno di essi in due punti* x, y, *tali che la somma dei quadrati dei segmenti* ox, oy *è per ciascun circolo costante, ed uguale al doppio quadrato del segmento che unisce il zero col punto di tangenza con lo stesso circolo della* ef. Avremo cioè nel circolo c_1 » $1 + 3 = 0 + 4 = x + y = 2 \times 2 = 4$; per il circolo c_2 » $7 + 13 = 4 + 16 = x + y = 2 \times 10 = 20$ ecc.

Detta proprietà permane anche quando la distanza dei centri fra i circoli consecutivi della catena sia maggiore o minore della somma 2 dei raggi. Ciò facilita le operazioni fra segmenti frazionari. Ad esempio:

(Fig. 29ª) Sia data una catena circolare radicale nella quale la distanza dei centri fra due circoli consecutivi della catena sia 0,50, ossia la metà del raggio $1a = 1$, e si domandi la serie addizionale dei triangoli dei quali la somma dei quadrati dei lati sia 26,50.

Faremo numericalmente $\frac{26,50}{2} = 13,25$, quindi

$13,25 - 1 = 12,25$ » $\sqrt{12,25} = 3,50$. Col centro nel mezzo c del segmento $ab = 3,50 \times 2 = 7$ e col raggio 1 si descriva il circolo; e tutti i triangoli, come amb che hanno il vertice sulla circonferenza c e la stessa base ab, hanno per somma dei quadrati dei lati 26,50.

Infatti si traccino il raggio perpendicolare cd e le da, db, avremo $\overline{ad}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{cd}^2 = \overline{3,50}^2 + 1^2 = 12,25 + 1 = 13,25$, ossia $\overline{ad}^2 + \overline{db}^2 = 2 \times 13,25 = 26,50$. Ma i

triangoli come *adb*, *amb* hanno la stessa base e mediana e perciò ugual somma dei quadrati dei lati, quindi $\overline{ma}^2 + \overline{mb}^2 = \overline{2.ad}^2 = 26{,}50$. Si traccino per *m* la *mn* parallela alla *ab*, e le *na*, *nb*. Per l'uguaglianza dei triangoli sarà $\overline{ma}^2 + \overline{mb}^2 = \overline{na}^2 + \overline{nb}^2 = 26{,}50$. ecc.

Determinazione della radice quadra di un segmento $s < 4$.

134. (Fig. 30ª) *Vogliasi* $\sqrt{ab}$ *essendo* ab < 4.

Descritto il circolo col raggio unitario, si porti sul raggio, a partire dal suo estremo il segmento *ab* e nel punto medio *o* di questo si elevi la perpendicolare *od* che incontri in *d* la circonferenza. Risulterà $ad = \sqrt{ab}$, come più volte si è dimostrato.

Con altra costruzione (Fig. 31ª), dall'estremo *a* del diametro si porti il raggio *az* come corda, prolungandolo, e la radice quadra di un segmento $am < 4$ preso sulla sua direzione, è la corda *an* dall'estremo del diametro all'intersezione *n* della perpendicolare abbassata al diametro stesso dall'estremità *m* del segmento. Ciò pure fu dimostrato al (124).

135. Per determinare la radice di un segmento $s > 4$, come dicemmo ai (123, 3° B), si divida per la potenza del 10 capace di dare un quoto $q < 4$, e descritto il circolo unitario, si estragga la radice del quoto *q* nel descritto modo; avremo $\sqrt{s} = 10^n q$. Ciò pure fu dimostrato (123, 3°, B).

Determinazione delle radici di grado 2ª di un segmento minore di 4.

135bis. (Fig. 25ª) Si domandi $\sqrt[16]{af'}$ essendo $af' < 4$. Si porti af' sulla direzione della corda $ao = ac = 1$. La perpendicolare $f'f$ al diametro ad, dà $af \sqrt{af'}$. Si faccia $ae' = af$; la perpendicolare ee' al diametro, dà $ae = \sqrt{af} = \sqrt{\sqrt{af'}} = \sqrt[4]{af'}$. Si faccia $ab' = ae$ e la perpend. $b'b$ dà $ab = \sqrt{ae} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{af'}}} = \sqrt[8]{af'}$. Si faccia $aa' = ab$ e la perpend. az' dà $az = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{af'}}}} = \sqrt[16]{af'}$. Ciò è evidente.

Sulla determinazione delle radici ennesime di esponente primo maggiore di 2 delle quantità geometriche.

136. Alla formazione delle potenze di un segmento (125 » 1°.2°.3° Fig. 22-23°) vedemmo che assumendo il lato di un triangolo isoscele come potenza di grado n, la base del triangolo è potenza di grado $n + 1$, ed ambedue i segmenti sono termini di una serie di potenze, della quale il primo termine è la base di altro triangolo isoscele simile di lato unitario: ma l'uno o l'altro dei detti triangoli, non può costruirsi, se oltre un loro lato non

è dato altro elemento idoneo, come l'angolo alla base o al vertice, l'altezza ecc.

Consegue che, dato un segmento *s*, come potenza ennesima e l'unità lineare *u* alla quale è riferito, non può graficamente determinarsi la radice ennesima del segmento *s*, nè può ricostruirsi la serie delle potenze tra le quali *s* è termine ennesimo, se oltre ai termini *s*, *u* non è dato anche un altro elemento determinante l'angolo che i segmenti *u* ed *s* formano tra loro.

Nel senso geometrico *una potenza lineare riferita alla unità va quindi considerata come un angolo del quale siano solo noti i lati e perciò non costruibile; ma se di tale angolo oltre i lati è noto il valore, allora la radice ennesima di un dato segmento è graficamente determinabile.*

a) Infatti (Fig. 23ª A, B), sia dato un segmento *o*5 come quinta potenza, e l'angolo *a* che il dato segmento forma con la unità lineare alla quale è riferito.

Costruito l'angolo *a* e determinato uno dei suoi lati uguale al dato segmento *o*5, dalla metà di questo si elevi la perpendicolare ad incontrare in 1 l'altro lato e si tracci la 4.5. Dalla metà della *o*4 si elevi la perpendicolare ad incontrare in 3 la *o*5. Dalla metà della *o*3 si elevi la perpendicolare ad incontrare in 2 la *o*4. Dalla metà della *o*2 si elevi la perpendicolare ad incontrare in 1 la *o*5. Dalla metà della *o*1 si elevi la perpendicolare ad incontrare in *c* la *o*4. Si traccino le *c*1, 1.2, 2.3, 3.4.

I triangoli isosceli e simili *oc*1, *o*1.2 . . . ., *o*4.5, danno la progressione continua ∺ *oc* : *o*1 : *o*2 : *o*3 : *o*4 : *o*5, nella quale, per quanto fu dimostrato al (125.2°), i ter-

mini progrediscono come le potenze del segmento $o1$, quando il segmento sia $oc=1$. Talchè sarà $\sqrt[5]{05} = o1$.

Consegue che: *quando è noto l'angolo che una data potenza lineare forma coll' unità alla quale è riferita, non solo può determinarsi la sua radice, ma può ricostruirsi la serie delle potenze alla quale il dato termine appartiene, ossia può determinarsi un termine qualunque della serie diverso da quello dato.*

b) L'operazione si abbrevia se oltre il segmento potenza e l'angolo a, è data anche l'unità lineare.

(Fig. 23ª c) Si domandi $\sqrt[3]{o3}$ essendo data l'unità oc e l'angolo a che questa forma col segmento $o3$.

Si costituisca l'angolo $3oc = a$, e dall'estremo c del segmento unitario si abbassi la perpendicolare cs al segmento $o3$. Avremo $\sqrt[3]{o3} = 2.os = o1$.

Infatti il triangolo $oc1$ è isoscele. Sul prolungamento del lato oc si faccia $o1' = o1$ e si tracci $1'2$ parallela alla $c1$; si faccia $o2' = o2$ e se per il punto $2'$ si traccia la parallela alla $c1$, questa dovrà passare dal punto 3, quando tanto l'unità co quanto l'angolo a sono i termini dai quali il segmento $o3$ dipende come potenza; dovendosi avere la serie continua $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{o1} : \frac{o1}{o2} : \frac{o2}{o3} \ldots$

e però $\sqrt[3]{o3} = o1$.

c) Dal triangolo rettangolo osc si vede come *il seno dell'angolo* a *è* $sc = 1 - \left(\frac{o1}{2}\right)^2$, *ove* $o1$ *è primo termine della serie di potenze*, e però $\sqrt[3]{03} = 2\sqrt{1-\overline{\text{sen.}a}^2}$

137. Se è dato un segmento come potenza ennesima e solo l'unità alla quale è riferito, per determinarne la radice ennesima deve ricorrersi al calcolo numerico. Come dai seguenti esempi:

1. Sia dato segmento b come potenza terza riferita alla unità a e si voglia $\sqrt[3]{b}$.

Paragonato a con b si trovi $b = 27.a = 27$: quindi $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{27} = 3 = 3.a$.

2. Rapporto alla unità a si domandi $\sqrt[7]{\text{segmento } b}$. Paragonato a con b, risulti $b = \frac{1}{128}a = \frac{1}{128}$: quindi

$$\sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

3. Sia $b = 3{,}375.a$ e si domandi $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{3{,}375}$.

L'esponente è 3 e tre sono i decimali del numero, quindi la radice terza ha una sola cifra decimale la quale è 0,5, poichè per 5 termina la data potenza. Il cubo massimo contenuto nella parte intera del numero è 1^3, perciò $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5 = 1{,}5.a$.

4. Risulti $b = 6{,}59375.a$ e si domandi

$$\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{6{,}59375}$$

La massima potenza quinta contenuta nella parte intera del numero è $1^5 = 1$, e la parte decimale della radice quinta è 0,5, poichè il numero termina per 5, e sono cinque i suoi decimali; e però $\sqrt[5]{6{,}59375} = 1{,}5 = 1{,}5.a$,

139. **Determinazione delle radici di esponente $2^n.p$ ove p è numero prime.**

Si domandi $\sqrt[40]{af'}$ essendo $af' < 4$ (Fig. 25ª).

Poichè l'esponente $40 = 8 \times 5$ dovrà estrarsi la radice ottava di af' e quindi la radice quinta di quella ottava ottenuta.

1. Operando come al(135bis) si determini $\sqrt[8]{af'} = ab$.

2. Paragonato ab col raggio unitario ca risulti $ab = 1{,}61051$.

3. Il n° 1,61051 ha la somma delle cifre di posto dispari uguale a quella delle cifre di posto pari; e perciò è divisibile per 11, e poichè la radice quinta ha una sola cifra decimale, dedurremo senz'altro che $\sqrt[5]{1{,}61051} = 1{,}10$.

4. Fatto $az = 1{,}10.ac$ sarà $az = \sqrt[5]{ab} = \sqrt[40]{af'}$.

139. *Sè il segmento* s *del quale si vuole la' radice ennesima è troppo grande, per potere operare graficamente, si divida per la potenza ennesima di un numero* p *intero e tale che dia un segmento quoto* q *sul quale si possa graficamente operare; e ottenuta la* $\sqrt[n]{q}$ *quella ennesima del segmento* s, *sarà* $\sqrt[n]{s} = \sqrt[n]{q} \times \sqrt[n]{p}$. Ad esempio si domandi $\sqrt[5]{s}$, essendo s segmento troppo grande, ma diviso per $2^5 = 32$ (Fig. 23ª A, B) risulti $\frac{s}{32} = o5$. Deter-

minata come al 136, *a*) $o1 = \sqrt[5]{o5}$, poiche $\sqrt[5]{32} = 2$. Avremo $\sqrt[5]{s} = 2.o1 = r$.

Costruita la serie ÷ *o*1, *o*2, *o*3, *o*4, *o*5 ne trarremo quella del segmento *s* facendo $r = 2.o1$ » $r^2 = 4.o1$ » $r^3 = 8.o1$ » » $r^4 = 16.o1$ » $r^5 = 32.o1 = s$. Per la dimostrazione vedasi quanto fu detto al (125.*c*) inquantochè si fonda sullo stesso principio.

140. Se si vuole una figura piana di area *a*, che sia radice ennesima dell'area A di una data figura piana quadrabile; come al (126) *si costruisca il quadrato equivalente alla figura di area* A. *Si determini la radice ennesima lineare del lato di questo quadrato, ed il quadrato costruito sulla radice ottenuta come lato, sarà di area* $a = \sqrt{A}$. Per la dimostrazione vedasi quanto dicemmo al (126 (A).

Può inoltre costruirsi la serie delle potenze di quella di area *a*, tra le quali l'ennesima e quella di area A, facendo le potenze lineari del lato del quadrato *a* e riducendo a quadrato i termini successivi della serie, a ciascuno dei quali, volendo, può sostituirsi una figura piana equivalente.

Tali figure avrebbero le aree progredenti secondo le potenze di quella *a*, e fra di esse l'ennesima potenza sarebbe quella proposta di area A (126.*a*.*b*),

141. Si osservi che quando la radice ennesima di un segmento, si è ottenuta con metodo del tutto geometrico come al (134 al 136), allora tanto la radice ennesima quanto la serie delle sue potenze, sono segmenti di valore finito, ossia rigorosamente esatto, ancorchè la data

potenza ennesima espressa numericamente in parti di unità sia numero indefinito o anche irrazionale.

Quando però la detta radice si è ottenuta con metodo grafico misto al numerico (137), tanto essa quanto tutti i termini della serie delle sue potenze, sono segmenti che si approssimano al loro vero valore, quanto più si approssima al valore del segmento dato come potenza, il numero che lo esprime.

Radici ennesime dei valori angolari

142. Finchè la geometria piana elementare si ritiene limitata a quelle sole figure che possono costruirsi mediante la riga ed il compasso, tanto l'angolo quanto l'arco descritto dal suo vertice e compreso fra i suoi lati, non possono ritenersi elementi geometrici perfetti. Dimostrammo infatti (6.16), che la maggior parte degli angoli non possono costruirsi graficamente; il che equivale a dire che la loro misura in gradi e decimali, nonchè quella degli archi che abbracciano, non può geometricamente determinarsi.

Nel (Trattato delle corde nel calcolo Cap. V), dimostrammo come per angoli al centro ed archi rispettivi procedenti come i numeri naturali, le rispettive corde computate in parti di raggio, progrediscono con diversa legge, e perciò anche le linee trigonometriche che a quelli angoli si riferiscono. Di conseguenza *non può determinarsi la radice ennesima di un angolo od arco, ricavando geometricamente quella della sua corda o di altra linea trigonometrica; deve invece considerarsi il valore dell'angolo espresso in gradi e decimali come un vero*

numero, ed operarsi su questo numero secondo i modi esposti al (Cap. I, Parte II): *la radice numerica ottenuta esprime in gradi e decimali il valore angolare radice di quello proposto come potenza; costruito questo angolo nei modi geometrici, sarà radice di quello dato.* Diamo alcuni esempi.

1. Vogliasi $\sqrt[3]{91^\circ,125}$. Trovato che il maggior cubo contenuto nella parte intera 91° è $4^3 = 64$ e che la terza potenza terminante per la stessa cifra 5 del dato numero è quella del 5; poichè il dato numero ha tre cifre decimali, quante sono cioè le unità del dato esponente 3, ne dedurremo senz'altro che

$\sqrt[3]{\text{ang. } 91^\circ, 125} = \text{ang. } 4^\circ,5$. Quest'angolo radice si costruisce con una bisezione dell'ang. 9°.

2. Si domandi $\sqrt[5]{\text{ang. } 7^\circ, 59375}$.

a) L'angolo dato è costruibile avendone i caratteri (12) e perciò anche la sua radice quinta è angolo costruibile.

b) La radice ha una sola cifra decimale, inquantochè sono 5 i decimali del suo valore come le unità dell'espontente.

c) La maggior quinta potenza contenuta nella parte intera 7°, del valore dell'angolo è 1, e però sarà 1° la parte intera in gradi dell'angolo radice.

d) Il valore dell'angolo dato termina per la cifra 5, e perciò 5 è la radice quinta della parte fratta; quindi

$\sqrt[5]{\text{ang. } 7^\circ, 59375} = \text{ang. } 1^\circ,5$. Questo si costruisce bisecando l'ang. 3.

3. Si sarebbe potuto operare applicando inversamente il principio dato al (128) per l'elevazione a potenza del valore di un angolo frazionario; e cioè:

1. Si riduce l'angolo dato al suo angolo base, facendo ang. $7^\circ\ 59373 \times 32 = 243^\circ$.

2. Si rileva dalla tav. 105 che $\sqrt[5]{243} = 3$.

3. Poichè il dato angolo ha 5 decimali, mentre 5 è l'esponente della radice; questa avrà una cifra decimale, e però faremo $\frac{3}{2} = 1,5$, ossia

$\sqrt[5]{\text{ang. } 7^\circ, 59375} = \text{ang. } 1^\circ,5$.

153. Se il dato angolo non è costruibile, si rende tale prima di operare, sommandolo con altro angolo non costruibile piccolissimo.

Vogliasi $\sqrt[5]{7^\circ, 5937}$. Sommando con esso angolo $0^\circ,00005$, faremo come sopra $\sqrt[5]{7,59375} = 1,5$: talchè con grande approssimazione $\sqrt[5]{7^\circ, 5937} = 1^\circ,5$.

CAPITOLO IV.

Sulla divisione degli angoli per un numero diverso da 2^n

144. Come principio generale. *Un angolo od arco costruibile di un numero intero di gradi del quale il valore è della forma* $3^o p$, *qualunque sia* p *è graficamente divisibile per questo numero e per uno dei suoi fattori. Tutti i multipli dell'angolo* $3^o p$, *ed i suoi duennesimi all'infinito, nonchè tutti gli angoli ed archi dei quali il valore si forma dalle combinazioni dei suddetti multipli e duennesimi per somma, differenza, prodotto o quoto, sono graficamente divisibili per* p *e per uno dei suoi fattori* (14).

Così ad esempio, poichè $3^o \times 3 = 9^o$ sono trisecabili tanto l'angolo ed arco 9°, come i suoi multipli e duennesimi, nonchè le loro combinazioni all'infinito.

Essendo $3^o \times 5 = 15^o$ sarà divisibile graficamente per 5 l'angolo 15 ed i suoi derivati all'infinito.

Sono divisibili graficamente per 7 l'angolo $21^o = 3^o \times 7$ ed i suoi derivati; lo sono per 11 gli angoli $33^o = 3^o \times 11$ ed i suoi derivati ecc., come sarà facile dimostrare ai nostri lettori, se vorranno ricordare quanto dicemmo alla Parte I, Cap. I.

Ciò dimostra quanto sia falsa l'opinione prevalsa che sia difficile dividere un angolo mediante la riga ed il compasso in un numero di parti diverso da 2^n.

145. Deve anche considerarsi come, con bisezioni successive, il duennesimo di un dato angolo può ridursi più piccolo di ogni quantità angolare immaginabile, talchè dato un angolo z che non sia della forma $3^n p$, potremo sempre trisecarlo sostituendo ad esso un angolo trisecabile $3^n p + \frac{3^n p}{2^n}$ che differisca da quello z di quantità trascurabile. Consegue da ciò che nel senso grafico, *un angolo qualunque* z *può dividersi in un numero* p *di parti uguali, sebbene* p *non entri tra i fattori di quello dato* z. Non è però così se l'angolo z si considera dal lato geometrico, essendo la sua divisibilità dipendente dalle sopra accennate condizioni, prima tra quali quella che l'angolo z sia graficamente costruibile; poichè se ang. 7° non può costruirsi con la riga ed il compasso, non potrà neppure costruirsi ang. $7° \times 5 = 35°$, sebbene quest'angolo sia tra quelli della graduazione della circonferenza per 360°, e di conseguenza non possono costruirsi nè i duennesimi degli angoli 7° » 35° nè alcuna delle loro combinazioni: quindi *un angolo non costruibile non può dividersi graficamente per* p, *sebbene questo sia fra i suoi fattori numerici, e tale angolo non ammette altri divisori grafici oltre il* 2 *e le sue potenze.*

146. Ma oltre la costruzione diretta dei quoti angolari, sulla quale si basa il sovraesposto metodo della divisione angolare, la geometria dà altri mezzi per eseguire questa operazione.

Vedremo in seguito come la divisibilità degli angoli

costruibili conduce talora alla divisione di quelli non costruibili, purchè appartengano alla categoria dei determinabili (18). Per giungere a dimostrarlo, tratteremo in precedenza della trisezione dell'angolo, anche per provare come la geometria possa al pari del calcolo giungere alla soluzione di problemi di ordine superiore.

Sulla trisezione dell' angolo

147. Ripetiamo, che nel senso grafico il problema della trisezione può ritenersi per risoluto, poichè se il valore dell'angolo da trisecarsi e 9°, suo multiplo o duennesimo, la sua terza parte è valore di angolo costruibile; trisecheremo perciò angolo 24°,75 costruendo angolo $\frac{24°,75}{3} = 8°,25$. Se poi l'angolo non è trisecabile si sostituisce con altro che lo sia, e che ad esso si approssimi per quantità trascurabile. Così per l'ang. non costruibile 24°,749 trisecheremo in sua vece ang. 24°,75 del quale la terza parte diversifica da quella dell'angolo 24°,749 della quantità trascurabile, 0°,001. Ma vedremo come la geometria dà anche il modo di trisecare un angolo non costruibile.

148. Sappiamo determinare il cubo di un segmento. Infatti (Fig. 23ª B), nell'isoscele $oc1$ di lato unitario fatta $2.1 = o1$, e 2.3 parallela al lato $c1$, risulta $o3 = \overline{o1}^3$. Ciò posto, sulla unità lineare ab (Fig. 32ª) si costruisca il triangolo equilatero acb, dal vertice e col lato cb si

descriva l'arco acb, si abbassi alla base la perpendicolare cd: risulterà $ad = \frac{1}{2}$. Si faccia $ad_4 = \frac{ad}{4} = \frac{ab}{8}$. Sappiamo che le potenze di $\frac{1}{2}$ procedono come i suoi duennesimi: avremo cioè $ad = \frac{1}{2}$ » $\overline{ad}^2 = \frac{1}{4}$ » $\overline{ad}^3 = \frac{1}{8} = ad_4$; talchè ad_4 è cubo di ad; ma $ac = ab = 1$ e $1^3 = 1$, quindi $ac = ab^3$; e però i punti d_4 c sono limiti dei cubi lineari di tutti quei segmenti che come an_1 sono maggiori di $ad = \frac{1}{2}$ e minori di $ac = 1$.

Fra il punto a e la perpendicolare cd si traccino quanti vogliansi segmenti am_1 an_1 as_1 .... ao_1, e dal punto b altrettante corde dell'arco acb ai detti segmenti rispettivamente uguali bm, bn, bs .... bo. Se ne determini il rispettivo cubo lineare, facendo come diciamo per la corda bs l'isoscele bss_2 di lato bs e vertice s, e quindi con centro s_2 e raggio $s_2 b$ si tagli in s_3 la bs; per il già dimostrato risulta $bs_3 = \overline{bs}^3$. Sulla $as_1 = bs$ si faccia $as_4 = bs_3$ sarà $as_4 = \overline{as_1}^3$. Operando ugualmente per ciascuna delle corde e rispettivi segmenti radianti da a, otterremo in am_4 an_4 .... ao_4 i rispettivi cubi delle corde bm bn ... bo. Per i punti c, o_4, r_4 .... m_4, d_4 si faccia passare una linea continua che risulta di leggera doppia curvatura. Un segmento qualunque come ar, racchiuso fra il punto a e la perpendicolare cd, sarà tagliato dalla curva in modo, che la sua parte racchiusa tra questa ed il punto a, è cubo del segmento. Avremo così i cubi dei segmenti compresi tra $ad = \frac{1}{2}$ e $ac = 1$.

Per determinare i cubi dei segmenti compresi tra

zero ed 1; sull'arco aeb si faccia corda $am = ad = \frac{1}{2}$ e su di essa $ax = \frac{1}{8}$ si tracci un'altra corda $as < am$ e se ne determini il cubo az, come dicemmo per la bs; in ugual modo si operi per diverse altre corde minori di $am = \frac{1}{2}$: per i punti estremi x, z, y, a dei rispettivi cubi di queste corde si faccia passare una curva continua $x\,z\,y\,a$. Evidentemente, qualunque corda $ar < am$, ossia compresa tra zero ed $^1/_2$; ha il suo cubo determinato fra il punto a e la curva $x\,z\,y\,a$.

149. La possibilità di determinare con una linea continua i cubi dei segmenti compresi tra zero e 2, e perciò nel circolo di raggio unitario i cubi delle corde comprese tra zero ed il diametro, e quanto dimostrammo nel trattato delle corde nel circolo (*113*) sulla correlazione $a_3 = 3a - a^3$ che passa tra la corda di un arco e quella del suo arco $\frac{1}{3}$, ci suggerisce la costruzione della seguente

Scala trisettrice angolare

150. (Fig. 33ª) Nell'equilatero aeb, sia nel descritto modo costruita la curva dei cubi e, o_4, d_4, z . . . a, si faccia $bh = bd_1$ e si elevino alla ah le perpendicolari hz, bf ad incontrare il prolungamento della ae. Poichè $ae = 1$ sarà $az = 3$ ed $af = 2$ diametro del circolo di raggio unita-

rio; le parallele dc, bf, hz tagliano tutti i segmenti compresi tra a e la perpendicolare hz in tre parti uguali, mentre la curva $co_4 \ldots . d_4$ determina dall'origine comune a il cubo della terza parte di uno qualunque dei detti segmenti. Dal vertice c è raggio ca si descriva l'arco ap_1b, e dal vertice z raggio za si descriva l'arco $ap_3 g$. Si costruisca nel suddetto modo la curva $d_4 xa$ dei cubi dei segmenti minori di $ad_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Per essere raggio $za = 3.ca$ qualsiasi corda come ag, ap_3 ... darà $ag = 3.aq$ » $ap_3 = 3.ap_1$. Sopra ogni segmento racchiuso tra l'origine a e la perpendicolare hz si porti dal suo estremo sulla hz il rispettivo cubo lineare in d_3, m_3, n_3... zf, e per questi punti si faccia passare una seconda curva continua $fs_3\ n_3\ m_3 \ldots . d_3$. Dagli estremi non comuni g, p_3 delle corde radianti da a, si porti in gi, $p_3 k$.... il rispettivo cubo lineare e si faccia passare per questi punti la curva continua $i\ k \ldots a$. Per questa disposizione un segmento qualunque am resta diviso in modo che avremo $am_3 = 3\ am_1 - \overline{am_1}^3$ ed una corda qualunque ap_3 minore di ad_3 radiante da a, dà $ap_3 = 3.ap_1 - \overline{ap_1}^3$, ossia questi segmenti restano divisi dalla curva $fn_3\ d_3$, e dalla perpendicolare cd_1, ovvero dalla curva ika e dall'arco $bp_1 a$, secondo la correlazione $a_3 = 3a - a^3$ che passa fra la corda di un arco nel circolo di raggio 1 e quella del suo arco $\frac{1}{3}$: e perciò se uno qualunque dei detti segmenti preso fra l'origine a e la curva $fn_3 d_3$, ovvero fra l'origine a e la curva ika, si assume come corda di un angolo al centro nel circolo di raggio 1, la sua parte intercetta fra il

punte a e la perpendicolare cd_1 ovvero fra lo stesso punto e l'arco $ap_1 b$ è la corda del suo arco $\frac{1}{3}$.

151. **Uso della scala trisettrice.**

a) Si voglia trisicare un dato angolo z.

Col raggio ca della scala, e col centro nel vertice dell'ang. z si descriva tra i suoi lati l'arco. Si prenda col compasso l'ampiezza, ossia corda di quest'arco; si porti a partire da a sulla base ah della scala trisettrice: se tale apertura risulta maggiore del segmento ad_3, fissa tenendo in a una punta del compasso, con l'altra si tagli ad ipotesi in n_3 la curva $fs_3 d_3$ e si tracci la an_3 la quale resta tagliata in n_1 dalla perpendicolare cd_1. Si prenda un' apertura di compasso uguale ad an_1 e si porti da un suo estremo come corda sull'arco dell'angolo z, e congiunto col vertice l'estremo di questa corda, ne resterà formato l'angolo $\frac{z}{3}$.

b) Se la corda dell'angolo z risulta minore di ad_3 allora fisso tenendo una punta del compasso in a, con l'altra si tagli la curva ika ad ipotesi in k e si tracci la ka che intersechi l'arco $ap_1 b$ in p_1; presa un apertura di compasso $= ap_1$ si porti come corda sull'arco dell'angolo z, risulterà come sopra l'angolo $\frac{z}{3}$.

c) Per la trisezione di angoli maggiori di 180° minori di 360°, ricordiamo che due archi esplementari sono sottesi da una corda comune.

(Fig. 34ª) Se vuole trisecarsi l'arco afb, misura del-

l'angolo concavo acb, si trisechi il suo esplementare arco adb, e trovata mediante la scala, la corda dell'arco $\frac{1}{3}\,adb$, si porti sul circolo in bd; quindi col lato del triangolo equilatero iscritto nello stesso circolo come raggio, e centro d, si tagli in f la circonferenza: risulterà fb corda dell'arco $\frac{afb}{3}$.

Infatti, arco $afb + bda = 360°$ e $\frac{afb + bda}{3} = \frac{360°}{3} = 120°$, arco abbracciato dall'angolo al centro del triangolo equilatero iscritto; ma per costruzione arco $fbd = 120°$ e poichè bd è corda dell'arco $\frac{bda}{3}$, sarà bf corda dell'arco $\frac{afb}{3}$.

d) Se l'arco da trisecarsi è maggiore di 360° è minore di 540°, in tal caso la corda del suo arco $\frac{1}{3}$ è maggiore del lato del triangolo equilatero iscritto (Fig. 35ª), e portata per tre volte consecutive sulla circonferenza in ab, be, ef s' intreccia in o, e dà l'arco da trisecarsi uguale a $360° + amf$, del quale l'arco $\frac{1}{3}$ è $\frac{360° + amf}{3} = 120° \frac{+ amf}{3}$: però si porti in ag il lato del triangolo equilatero iscritto ed in ah la corda dell'arco $\frac{amf}{3}$ data dalla scala, e l'arco geh di corda gh sarà $\frac{1}{3}$ di quello dato $360° + amf$.

e) Sia girato l'angolo da trisecarsi; ad esempio

si richieda ang. $\frac{1185^\circ}{3}$. Dividendo per la circonferenza troviamo $1185^\circ = 3 \times 360^\circ + 105^\circ$ che diviso per 3 dà $360^\circ + \frac{105^\circ}{3}$. Mediante la scala si trovi e porti in ah corda dell'arco $\frac{amf}{3} = \frac{105^\circ}{3}$, ed avremo, ang. girato $\frac{1185^\circ}{3} = 360^\circ + anh$.

Resta così dimostrato che la scala trisettrice angolare in qualsiasi caso permette la soluzione grafica del problema.

152. La geometria, sussidiata dall'aritmetica, dà ancora un modo di risolvere il problema della trisezione.

Il metodo che ora esporremo presuppone che l'operatore disponga d'istrumenti di precisione per la determinazione esatta del rapporto fra il raggio unitario e la corda dell'arco che vuol trisecarsi.

a) Per la già citata formula $a_3 = 3.a - a^3$, supposto che sia $\frac{a}{b}$ il rapporto tra la corda di un arco ed il raggio 1, quello che passa tra la corda c dell'arco triplo ed il raggio unitario sarà $\frac{c}{b} = \frac{3.a}{b} - \frac{a^3}{b^3} = \frac{3.ab^3 - a^3b^3}{b^4}$; espressione nella quale il diminuendo del numeratore $3.ab^3$ è numero intero e multiplo di 3: il diminutore a^3b^3 dello stesso numeratore è cubo perfetto; il denominatore b^4 e potenza quarta esatta di radice b, uguale

al denominatore nel rapporto $\frac{a}{b}$ della corda dell'arco $\frac{1}{3}$ al raggio 1. Ciò posto, dato il rapporto tra la corda di un angolo da trisecarsi ed il raggio: $\frac{c}{b} = \frac{3ab^3 - a^3b^3}{b^4}$, per dedurne quello $\frac{a}{b}$ della corda del suo angolo $\frac{1}{3}$ al raggio opereremo come segue:

1. Determineremo il denominatore del rapporto tra la corda dell'arco $\frac{1}{3}$ al ragggio facendo $\sqrt{\sqrt{b^4}} = b$.

2. Faremo il cubo b^3 dello stesso denominatore.

3. Divideremo per il cubo b^3 il numeratore facendo $\frac{3.ab^3 - a^3b^3}{b^3} = q$.

4. Il quoto ottenuto q, che risulta frazionario, si riduce intero e multiplo di 3, sommandolo con un numero $n < 2$ capace di renderlo tale; facendo $q+n=3.a$, e un terzo di questo sarà il numeratore del rapporto fra la corda dell'arco $\frac{1}{3}$ ed il raggio, del quale il denominatore è b, talchè questo rapporto risulta $\frac{a}{b}$.

5. La corda a, determinata in parti di raggio 1, sarà contenuta 3 volte esattamente nel dato arco di corda $\frac{c}{b}$.

b) Numericamente il calcolo si dispose come vedesi alla quì sotto tabella A. Ottenuta la corda $\frac{a}{b} = \frac{5}{11}$, si passa alla riprova A' nella quale

Trisezione dell'angolo al centro di corda *c* nel circolo di raggio $1 = b$.

Rapporto $\frac{c}{b} = \frac{18590}{14641}$ **A**

(1°) $\sqrt{\sqrt{14641}} = 11$; (2°) $\overline{11}^3 = 1331$

(3°) $\frac{18590}{1331} = 13 + \frac{1287}{1331}$

(4°) $13 + \frac{1287}{1331} + 1 + \frac{24}{1331} = 15$ **intero e multiplo di 3**

$\frac{15}{3} = 5$

Rapporto dell'arco $\frac{1}{3}$ **al raggio** $\frac{a}{b} = \frac{5}{11}$

RIPROVA

$\frac{c}{b} = \frac{5}{11} \times 3 - \left(\frac{5}{11}\right)^3 = \frac{18590}{14641}$ **A'**

il triplo della corda diminuita del suo cubo deve riprodurre il rapporto $\frac{c}{b} = \frac{18590}{14641}$ della corda dell'angolo trisecato al raggio 1.

153. Quando il rapporto al raggio 1 della corda *c* dell'angolo da trisecarsi è dato in parti decimali del raggio, e che si disponga di una tavola dei cubi dei nu-

meri naturali, l' operazione si semplicizza come appresso:

1. Dal numero dei decimali della data corda si determina quello m dei decimali della sua radice cubica.

2. Fra i cubi dei numeri di m decimali, si cerca nelle tavole quello che sommato con la corda c, da un totale t multiplo di 3 è che nel tempo stesso abbia m decimali.

3. Il quoto $\frac{t}{3} = c'$ è in parti decimali di raggio 1 valore della corda dell'arco $\frac{1}{3}$ di quello proposto.

La riprova si effettua come al precedente esempio:

a) Numericamente si disponga il calcolo come dai 2 esempi quì appresso indicati B-C, nel primo dei quali la corda c dell'angolo da trisecarsi ha 3 decimali, e perciò tanto la sua radice quanto il triplo della corda dell'arco $\frac{1}{3}$ hanno un sol decimale.

Trisezione dell'ang. *acb* di corde *c* computata in parti decimali di raggio 1.

Corda $c = 1{,}375$ B

1. **La corda avendo 3 decimali, la radice cubica avrà una sola cifra decimale.**
2. **Si rinviene nelle tavole il cubo $\overline{0{,}5}^3 = 0{,}125$, che sommato con $c = 1{,}375$ dà il totale 1,5, multiplo di 3 e di una sola cifra decimale come la radice.**
3. **Corda dell'arco $\frac{1}{3} = c' = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}50$.**

(Riprova) $3 \times 0{,}50 - 0{,}50^3 = 1{,}375 = c$.

Nel secondo esempio la corda c avendo sei decimali, tanto la sua radice quanto il triplo della corda dell'arco $\frac{1}{3}$ hanno 2 decimali.

Corda $c = 0{,}677833$. La radice ha 2 decimali.

$0{,}23^3 = 0{,}012167$

Somma 0,69 . . . . C.

Corda dell'arco $\frac{1}{3} = c' = \frac{0.69}{3} = 0{,}23$

(Riprova) $0{,}23 \times 3 - \overline{0{,}23}^3 = 0{,}677833 = c$.

b) Quando il numero delle cifre decimali della corda c è molto grande od anche indefinito, si opera nell'identico modo, limitando ad arbitrio il numero delle cifre decimali che si vogliono assegnare alla corda c' dell'arco 1 : valgano i seguenti esempi :

c) Si domandi la corda dell'arco $\frac{60^\circ}{3} = 20^\circ$(D).

Trisezione dell'angolo 60° (D)

Corda $60^\circ = c = 1{,}0000$

$0.\overline{3473}^3 = \underline{0{,}0149}$

Somma $= \underline{1{,}0149}$

Corda $\frac{60^\circ}{3} = 20^\circ = c' = \frac{1{,}0149}{3} = = 0.3473$

(Riprova) $0.3473 \times 3 - 0{,}\overline{3433}^3 = 1. = c$

Nella tavola dei cubi dei numeri di quattro cifre, si cerchi quello del quale le prime 4 cifre a sinistra, sommate con $c = 1$ lo rendono multiplo di 3. Un terzo del totale ottenuto sarà

valore della corda 20°, con approssimazione a quattro decimali.

d) Se poi la corda dell'angolo da trisecarsi è data da un numero di per sè stesso multiplo di 3, si opera in ugual modo cercando il cubo del numero di *m* cifre, del quale le prime *m* cifre sommate coi decimali della data corda, danno pure un totale multiplo di 3; ed il terzo di questo sarà valore della corda dell'arco $\frac{1}{3}$.

e) Si domandi la corda dell'arco $30° = \frac{90°}{3}$.

Poichè la corda del retto è lato del quadrato iscritto $\sqrt{2} = 1{,}4142$, numero del quale la somma delle cifre è multiplo di 3; si rinvenga nelle tavole $\overline{0{,}5176}^3 = 0{,}1386\ldots$, del quale le prime 4 cifre sommate coi decimali della corda danno il totale 1,5528 pure multiplo di 3; sarà corda dell'arco $30° = \frac{90°}{3} = \frac{1{,}5528}{3} = 0{,}5176$.

f) Si osservi che il calcolo può abbreviarsi.

Infatti, il numero del quale le prime *m* cifre del cubo devono sommarsi con gli *m* decimali della corda, esprime di per sè stesso il valore della cercata corda dell'arco $\frac{1}{3}$.

Così trisecando l'ang. 60°, trovato che il cubo da sommarsi è $\overline{0{,}3473}^3$, sarà corda $\frac{60°}{3} = 20° = c' = 0{,}3473$.

Trisecando l'ang. 90°, trovato che il cubo da sommarsi è $\overline{0{,}5176}^3$, sarà corda $\frac{90°}{3} = 30° = c' = 0{,}5176$.

154. La possibilità di trisecare l'angolo, permette la determinazione esatta del grado $1^\circ = \frac{3^\circ}{3}$, e di conseguenza la costruzione grafica di tutti quei poligoni regolari dei quali il lato è corda di un arco espresso da un numero intero di gradi divisore del 360°; ovvero è corda di un duennesimo di questo arco, o anche di $\frac{1}{3^n}$ o di un $\frac{1}{2^n}$ di $\frac{1}{3^n}$ dell'arco stesso, come dai seguenti esempi:

Iscrivere i poligoni regolari di 3^n lati e di $2^n \times 3^n$ lati

155. (Fig. 36^a) Nel circolo c si prolunghi il diametro ab, si faccia arco $bs = 30^\circ = \frac{afd}{3} = \frac{90^\circ}{3}$, e tracciata la ds ad incontrare in o il diametro prolungato, la parte so della do esterna al circolo c sarà uguale al raggio ca (23). Col centro o e raggio os si descriva il circolo, e mediante la scala trisettrice si faccia arco $mn = \frac{gs}{3} = \frac{30^\circ}{3} = 10^\circ$. Si tracci la sm ad incontrare in e il diametro prolungato ed in f la circonferenza c; risulterà la parte me della fe esterna al circolo o uguale al raggio ca. Col centro e, raggio em si descriva il circolo, e mediante la scala trisettrice si faccia arco $az = \frac{mn}{3}$ e si tracci la mz ad incontrare in h il diametro prolungato, risulterà zh parte della mh esterna al circolo e uguale al raggio ca; e così proseguasi.

Abbiamo arco $bs = \frac{afd}{3}$ » $mn = \frac{bs}{3} = \frac{afd}{9}$ » $zr = \frac{mn}{3} = \frac{bs}{9} = \frac{afd}{27}$ ecc.: ma $afd = 90°$, e perciò $bs = \frac{90°}{3}$ » $mn = \frac{90°}{9}$ » $zr = \frac{90°}{27}$, ossia gli archi di $\frac{90°}{3^n}$. Come archi di angoli al centro di poligoni regolari iscritti avremo *bs* arco del dodecagono, *mn* del poligono di 36 lati, *zr* del poligono di 108 lati . . . Duplicando successivamente gli stessi archi ne trarremo ancora altri di poligoni di 2×3^n lati, cioè 2.*bs* lato dell'esagono » 2.*mn* del poligono di 18 lati » 4.*mn* del poligono di 9 lati » 2.*zr* del poligono di 54 lati » 4.*zr* del poligono di 27 lati; bisecando successivamente avremo poi a'l'infinito i poligoni $2^n \times 3^n$ lati.

Divisione di un angolo costruibile o determinabile per un numero primo maggiore di 2.

156. (Fig. 37ª) Dall'uno all'altro lato di un ang. *ac'''b* a partire dal vertice, si porti successivamente per *n* volte un segmento *c'''o*, e dai vertici *c'''*, *c''*, *c'* col segmento *c'''o* come raggio, si descrivano i circoli.

Come dimostrammo nella formazione generale degli angoli (27) avremo ÷ arco *oo'* · *nn'* · *mm'* · *ba* : 1 · 3 · 5 · 7... ossia *la progressione degli archi procede come quella dei numeri naturali dispari.* Facendo le differenze successive fra i detti numeri e quello 9, trovasi 9—1=8 » 9—3=6 » 9 — 5 = 4 » 9 — 7 = 2 . . . , ossia *dette differenze sono con ragione inversa dei numeri dispari la progressione dei numeri naturali pari. Ora, finchè gli ang.* acb *e* $\frac{acb}{n}$

sono costruibili o determinabili, 9. $\frac{acb}{n}$, *qualunque sia* n *purchè intero, è valore di angolo costruibile.*

Ciò posto:

1. Voglia dividersi ad ipotesi per 7 un dato angolo acb che sia costruibile o determinabile; come $acb = 61°,25$ angolo determinabile; poichè trovasi anche determinabile $\frac{acb}{7} = \frac{61°25}{7} = 8°,75$; risulterà $9 \times 8°,75 = 78°,75$ angolo costruibile: talchè costruito ang. $acd = 78°,75$ avremo ang. $bcd = acd - acb = \frac{9,acb}{7} - \frac{7,acb}{7} = \frac{2,acb}{7}$; e bisecato con la cg l'ang. bcd risulterà angolo $bcg = \frac{acb}{7}$ come richiedevasi.

2. Voglia dividersi in 11 parti l'ang. determinabile $ach = 96°,25$. Poichè $\frac{ach}{11} = \frac{96°,25}{11} = 8°,75$ determinabile; e $9 \times 8°,75 = 78°,75$, così ang. $ach - acd = dch = \frac{11,ach}{11} - \frac{9,ach}{11} = \frac{2,ach}{11}$; e biseccato l'angolo dch sarà angolo $bcg' = \frac{ach}{11}$.

3. Vogliasi la tredicesima parte dell'ang. determinabile $ack = 113°,75$. Avremo ang. $ack = 8°,75$ determinabile » $9 \times 8°,75 = 78°,75$ » ang. $dck = \frac{13.ack}{13} - \frac{9.ack}{13} = \frac{4.ack}{13}$, sia cg' la seconda bisettrice dell' ang. dck ed

avremo ang. $cgd' = \frac{ack}{13}$. In egual modo si divide per altro numero primo n maggiore di 3 un dato angolo, purchè esso sia costruibile o determinabile e tale sia la sua parte ennesima.

157. Quando poi il dato ang. acb è indeterminabile o che sia pure costruibile o determinabile, ma la sua ennesima parte risulta valore di angolo indeterminabile, allora quello $9.acb$ non è costruibile. Quindi si rende determinabile l'ang. acb sommando o sottraendo da esso altro angolo a piccolissimo, si opera come sopra sul totale o sulla differenza ottenuta, e la sua parte ennesima differirà da quello $\frac{acb}{n}$ dell'angolo piccolissimo trascurabile $\frac{a}{n}$. Ad esempio:

Voglia dividersi per 7 l' angolo indeterminabile $acb = 61°,24$. Faremo $61°,24 + 0,01 = 61°,25$ e trovato come sopra ang. $bcg = \frac{61°,25}{7}$ questo sarà maggiore del richiesto $\frac{61°,24}{7}$ dell' angolo trascurabile $0°,0014$. Se fosse dato ang. $acb = 61°.26$ si farebbe $61°,26 - 0°,01 = 61°,25$, ed allora l'ottenuto ang. bcg sarebbe minore di quello ricercato delle quantità trascurabile $0°,0014$.

Se l'angolo da dividersi per n è troppo grande, si opera nel descritto modo sopra una sua parte aliquota q, ed ottenuta la parte n^a di questa, quella del dato angolo sarà qn. Ad esempio, voglia iscriversi l'ettagono regolare,

La circonferenza 360° è costruibile, ma arco $\frac{360°}{7}$ è indeterminabile, inoltre essendo 360° arco troppo grande per poter operare nel descritto modo, opereremo sopra l'arco $\frac{360°}{4} = 90°$. Trovasi $\frac{90°}{7} = 12°,857 \ldots\ldots$ che renderemo determinabile facendo 12°,8575 da cui $\frac{360°}{7} = 12°,8575 \times 4 = 51°,43$, angolo che è maggiore di quello $\frac{360°}{7}$ della quantità trascurabile 0°,0014.

158. Se si considera che un angolo indeterminabile può sempre sostituirsi con altro determinabile che ad esso si avvicini quanto si voglia, e si ricorda che un angolo multiplo di n e suoi duennesimi all'infinito sono graficamente divisibili per n, dovremo coucludere che il grande problema della divisione dell'angolo per un numero primo, il quale tanto ha affaticato i geometri, può ritenersi pressochè risoluto. Può anche supporsi che la geometria, la quale permette la determinazione grafica delle radici ennesime delle quantità geometriche e dà il modo grafico per trisecare l'angolo, offra anche il mezzo tuttora ignorato, dato un angolo acb, di poter costruire con la riga ed il compasso una voluta serie di triangoli isosceli di lati uguali disposti come in figura, ed allora la divisione per n di qualsiasi angolo anche indeterminabile sarebbe graficamente ottenuta.

159. Da quanto si è detto sulle radici delle quantità geometriche e sulla divisione dell'angolo per un numero primo, resta dimostrato come la geometria con mezzi assai elementari, e talora meglio di qualsiasi ramo del calcolo, risolva problemi di ordine superiore, e che essa si estende in un campo assai più vasto di quello che le si è voluto fino ad ora assegnare.

PARTE TERZA

Geometria piana elementare curvilinea

160. La geometria elementare si costituisce di tre distinte parti o *stati geometrici.*

Primo: *delle linee e segmenti.* Secondo; *delle aree e superfici.* Terzo; *dei volumi.*

Ciascuno stato geometrico si forma di figure rettilinee e curvilinee.

La misura delle figure del primo stato è *l'unità lineare*, del secondo è *l'unità quadrata*, del terzo *l'unità cubica.*

Nei corsi scolastici di geometria elementare, esclusione fatta del circolo, non si fa menzione delle figure curvilinee, sebbene queste nelle loro applicazioni siano di grande utilità.

Non intendiamo di scrivere un trattato sulla geometria piana e solida curvilinea, che risulterebbe voluminoso quanto quello della rettilinea, ma ci limiteremo ad esporre un riassunto sommario della sola geometria piana curvilinea, tale però che dia un'idea adequata di questo importante ramo della scenza.

Questo nostro intendimento ci costringerà a seguire un metodo di esposizione non troppo ordinato e pregevole nel senso didattico, e di ciò domandiamo scusa in precedenza ai nostri lettori.

CAPITOLO I.

Figure ipocratiche

161. Fino dall'anno 430 avanti N. S. G. C., Ipocrate di Chio per il primo dimostrò la misura dell'area di una figura di contorno curvilineo col seguente teorema:

(Fig. 38ª) Sui tre lati del triangolo rettangolo isoscele *abd* come diametri, costruiti i semicircoli volti nello stesso senso, se dal semicircolo *aibd* si tolgono i segmenti circolari *bai*, *bdk* resta il triangolo *abd*: se gli stessi segmenti si tolgono dai semicircoli *bag*, *bdh* restano le lunole *aibg*, *dkbh*: quindi la somma delle aree delle lunole *aibg* + *dkbh* = *abd* triangolo rettangolo isoscele.

162. Diremo *ipocratiche* tutte le figure provenienti dal detto principio. In una lunola ipocratica chiameremo *corda* la congiungente i punti estremi *a*, *b* della lunola.

163. *La corda* ab *riferita ai due archi formanti la lunola* aibg, *è lato del quadrato iscritto nel circolo al quale appartiene l'arco* aib, *e diametro nel circolo dell'arco* agb; quindi arco *aib* = 90°, arco *agb* = 180°, e arco *aib* : *agb* :: 90° : 180° :: 1 : 2, ossia, **gli archi formanti la lunola ipocratica sono nel rapporto $\frac{1}{2}$.**

164. **L'area della lunola ipocratica è $\frac{1}{4}$ del quadrato della sua corda.**

Infatti lunola $aicb = acb$ triangolo rettangolo isoscele, ma $acb = \frac{\overline{ab}^2}{4}$, quindi $aigb = \frac{\overline{ab}^2}{4}$.

165. (Fig. 38ª) Dal centro c si abbassi alla corda ab la perpendicolare cg, questa divide per metà tanto il triangolo rettangolare isoscele acb, che la lunola $aigb$; avremo triangolo rettangolo isoscele $aec = ioapg$ triangolo mistilineo; ossia, *se in un triang. rettang. isoscele con l'ipotenusa ed un cateto come raggi, e con centri nei loro estremi non comuni, si descrivono gli archi ad incontrare il prolungamento dell'altro cateto, il triangolo curvilineo formato da questi archi è equivalente al triangolo rettangolo isoscele.*

Serie duennesima ipocratica

166. (Fig. 39ª) Nel circolo di raggio ca si bisechi con la cg il quadrante aib, si abbassi al diametro ab la perpendicolare il, col raggio cl si descriva il circolo; dall'intersezione e si abbassi la perpendicolare en, e col raggio cn si descriva il circolo; dall'intersezione q si abbassi la perpendicolare qy e col raggio cy si descriva il circolo e così proseguasi. Si traccino le corde ab, lm, nr, ys..., e su queste come diametri si descrivano i semicircoli,

ne restano formate le lunole ipocratiche *aibg, lemi, nqre* .... Indicando i circoli coi loro raggi, rapporto al circolo *ca* la corda *ab* è lato del quadrato iscritto, e rapporto al circolo *cl* è lato del quadrato circoscritto; la corda *lm* è lato del quadrato iscritto al circolo *cl* e lato del quadrato circoscritto al circolo *cn* e così di seguito: ma nel circolo il rapporto tra il quadrato iscritto ed il circoscritto e $\frac{1}{2}$, quindi i circoli *ca*, *cl*, *cn* ... *sono in serie duennesima decrescente, e perciò anche le aree delle lunole e delle altre figure simili curvilinee e mistilinee, che gli archi e corde decrescenti formano incontrandosi fra loro;* avremo così le serie ∺ circolo *ca* : *cl* : *cn* : *cy* : .... settore *aci* : *lce* : *ncq* : *ycr* : .... :: segmento circolare *abi* : *lme* : *nrq* : *ysv* : .... :: triang. mistilineo *ail* : *len* : *nqy* : .... :: triang. mistilineo *ile* : *enq* : *qyr* : .... :: settore irregolare *cag* : *cli* : *cne* : *cyq* : .... :: triangolo isoscele *cli* : *cne* : *cyq* : .... :: $\overline{ab}^2$: $\overline{lu}^2$: $\overline{nr}^2$: $\overline{ys}^2$: .... :: anello circolare *ca* — *cl* : *cl* — *cn* : *cn* — *cy* : .... :: trapezio mistilineo *alei* : *lnqe* : *nyrq* : .. :: $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots\ldots : \frac{1}{2^n}$.

167. *Le potenze di* $\frac{1}{2}$ *procedono come i suoi duennesimi.* Avremo perciò:

∺ circolo *ca* : *cl* : *cn* : *cy* : .... :: 1 : *cl* : $\overline{cl}^2$: $\overline{cl}^3$: ... $\overline{cl}^n$ ∺ settore *aci* : *lce* : *ncq* : *ycr* : .. :: 1 : *lce* : $\overline{lce}^2$: $\overline{lce}^3$: .... $\overline{lce}^n$ ecc., ossia le serie decrescenti delle potenze delle aree di tutte le figure suddette

nonchè di tutte quelle che possono formarsi combinando le prime per contatto e posizione.

168. Fra le suddette figure sono quadrabili quelle generate dalle lunole ipocratiche, e sono solo quadrabili con l'approssimazione del rapporto π della circonferenza al diametro tutte le altre.

Ci serviremo del segno $=$ per indicarne l'equivalenza tra due figure quadrabili, e del segno $\not\equiv$ per indicare l'equivalenza tra due figure non quadrabili.

169. Sempre riferendoci alla sopraesposta serie duennesima, per essere lunola $aibg = acb = \frac{\overline{ab}^2}{4}$, per la serie duennesima essendo $\frac{\overline{ab}^2}{4} = \overline{nr}^2$, avremo lunola $aibg = \overline{nr}^2$: potremo anche esprimere in parti di raggio 1, $\sqrt{aibg} = nr$ ecc.

Semilunola $enq = qyc$ triangolo ; ma $qyc = \overline{ilc}^3$ quindi $\sqrt[3]{\text{semilunola } enq} = ilc$ ecc.

In ugual modo per le figure di quadratura approssimabile avremo circolo $cl \not\equiv ca - cl$ anello » circolo $cn \not\equiv cl - cn$ anello . . . . settore $aci \not\equiv lcm \not\equiv$ semicircolo $cn \not\equiv$ circolo cy . . . ecc.

Inoltre, per essere settore $lce \not\equiv alei$ trapezio mistilineo, e triangolo $lqc = io'lte$ semilunola, togliendo ordinatamente dalle prime le seconde quantità, trovasi set-

tore *lce* — *lqc* ∥ trapezio mistilineo *alei* — *io'lte* semilunola, ossia semisegmento circolare *etlq* ∥ *aoio'l* triangolo mistilineo ecc.

170. Per il teorema di Pitagora si vede che il principio dimostrato da Ipocrate si estende alle lunole costruite sopra i lati di qualsiasi triangolo rettangolo.

(Fig. 40ª) Sui tre lati del triang. rettang. *abd* descritti i semicircoli volti nello stesso senso, togliendo successivamente dal semicircolo maggiore e quindi dai due minori i segmenti circolari *bai*, *bdk* risulta lunola *aibg* + *bkdh* = *abd*; però le lunole così formate non avendo gli archi nel rapporto $\frac{1}{2}$ nè l'area uguale ad $\frac{1}{4}$ del quadrato della rispettiva corda, non sono ipocratiche, nè possiamo in un modo diretto dividere il triangolo *adb* equivalente alla loro somma, in due parti che siano rispettivamente equivalenti a ciascuna lunola: *ma poichè possiamo quadrare le lunole ipocratiche costruite sopra i lati del triangolo, potremo determinare il rapporto delle aree di queste con quelle delle prime;* come dal seguente esempio:

(Fig. 41ª) S'iscriva il triang. rettang. *abd*, e sopra i suoi cateti costruiti i semiquadrati *ac'b*, *bc"d* si formino le lunole ipocratiche *aibg*, *bkdh*. Si traccino *c'n* parallela *ab*, *cm* parallela alla *bd* nonchè le *bm*, *bn*; avremo triangolo *anb* = *acb* per avere la stessa base ed altezza, e per la stessa ragione triang. *bmd* = *bcd*. Preso *dp* = *mn* si tracci la *bp*: triang. *mbn* = *dbp* per avere ugual base ed altezza, ma i due semiquadrati sono equivalenti alle rispettive lunole, quindi lunola
aibg + *bkdh* = *anb* + *bmd* = *abp*.

Paragonando le lunole ipocratiche con quelle *asbg*, *azdh* che formano i semicircoli descritti sui tre lati del triangolo *abd*, abbiamo lunola $(aibg+bkdh)-(asbg+bzdh)=$ $= abp - abd = dbp = aibs - bzdk$.

Coll'avvicinarsi dei lati *ba*, *bd* a quelli del triangolo rettang. isoscele iscritto nello stesso semicircolo, diminuisce la detta differenza, la quale diviene nulla quando lato $ba = bd$, ed allora soltanto le lunole formate sui tre lati sono ipocratiche.

171. *Possiamo determinare graficamente il rapporto di quadratura che possa fra le aree delle lunole ipocratiche costruite sui tre lati di un triangolo, ed in genere di qualsiasi figura rettilinea.*

Infatti (Fig. 41ª) Sui lati *ap*, *ab*, *bp* di un triangolo *abp* come corde si costruiscano le lunole ipocratiche l, l', l'', e dal mezzo p' della base *ap* del triangolo si tracci la parallela $p'b'$ ad uno dei suoi lati. Avremo evidentemente $\overline{ap'}^2 : \overline{ab'}^2 : \overline{b'p'}^2 :: l : l' : l'' :: \overline{ap}^2 : \overline{ab}^2 : \overline{bp}^2$.

172. **Il rapporto che passa fra i quadrati dei lati e dei segmenti costituenti una figura, passa anche fra le aree delle lunole ipocratiche costruite sugli stessi lati e segmenti come corde.**

Infatti, se c, c', c'', sono lati o segmenti di una figura assunti come corde di altrettante lunole ipocratiche l, l', l'', avremo come sopra

$$l, : l', : l'', :: \frac{\overline{c}^2}{4} : \frac{\overline{c'}^2}{4} : \frac{\overline{c''}^2}{4} :: \overline{c}^2 : \overline{c'}^2 : \overline{c''}^2.$$

Consegue che sono infinite le figure ipocratiche quadrabili.

Ci limitiamo a darne alcuni esempi non volendo eccedere i limiti propostici.

a) (Fig. 38ª) Se nel triang. rettang. isoscele *abd* è l'ipotenusa $ad = 2$, l'area della lunola della quale è corda sarà $\frac{2^2}{4} = 1$. ma $\overline{ad}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bd}^2$, quindi anche la somma delle lunole costruite sui lati *ba*, *bd* è $\frac{2^2}{4} = 1$, e perciò l'area della figura curvilinea
$aedhbg = 1 + 1 = 2. = \overline{ab}^2$, ossia quadrato iscritto nel circolo di raggio $ca = 1$.

b) (Fig. 41ª) Se nel triang. rettang. *abd* è ipotenusa $ad = 2$, sarà anche lunola $aedbs + aibg + bkdh = 2$. L'area A della figura curvilinea *aedhbg* sarà di conseguenza 2 — lunola *aibs* + lunola *bzdk*; ma al (169) dimostrammo che lunola $aibs - bzdk = dbp$, quindi area della figura curvilinea $A = 2 - dbp$.

c) (Fig. 42ª) Nel triangolo ottusangolo *abd* si voglia costruire una lunola ipocratica che sia somma di quelle costruite sui lati *ab*, *bd* del triangolo. Fatto $ep = eb$ mediana, avremo (79) che $\overline{ab}^2 + \overline{bd}^2 = \overline{ap}^2 + \overline{pd}^2$. Sulla perpendicolare in *p* alla *ad* si prenda $po = pd$, risulta $\overline{ao}^2 = \overline{ap}^2 + \overline{po}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bd}^2$, e dividendo per 4 sarà lunola $(ao = l) = (ab = l' + bd = l'')$.

d) (Fig. 43ª) I triangoli *acb*, *qob* abbiano uguali proiezioni dei lati, sia cioè $pa = pq$ e *bp* comune. Sulle corde *oq*, *ca*, *ap* si costruiscano le lunole ipocratiche, sull'arco *oo'q* si faccia corda *o'q'* parallela alla *oq* ed uguale al lato *ob*; sull'arco *cma* si faccia corda *em* parallela alla *ac* ed uguale al lato *cb*; sull'arco *pha* si faccia corda *hi* parallela alla *ap* ed uguale a *pb*, sulle corde *o'q'*, *em*, *ih* si costruiscano le lunole ipocra-

tiche; col raggio cb centro c si descriva l'arco, e per a ad incontrarlo la tangente at, si faccia $ar = \frac{at}{2}$. Dalle serie differenziali triangolari abbiano

$$(\overline{oq}^2 - \overline{ob}^2 = \overline{oq}^2 - \overline{o'q'}^2) - (\overline{ac}^2 - \overline{cb}^2 = \overline{ac}^2 - \overline{em}^2) = \overline{at}^2;$$

e però le figure di contorni curvilinei e di aree x, s costituite dalla differenza delle lunole ipocratiche costruite sui lati dei triangoli qob, acb, nonchè tutte quelle che si possono costruire sopra due concorrenti ad, bd in un punto qualunque d della perpendicolare po all'infinito sono fra loro equivalenti e ciascuna di esse equivalente alla differenza di area z fra le lunole ipocratiche le quali hanno per corda le proiezioni comuni pa, pb.

Avremo anche area $x = s = z = \frac{\overline{at}^2}{4} = \overline{ar}^2$, come ancora $\frac{oq + ob \times oq - ob}{4} = \frac{ca + cb \times ca - cb}{4} =$

$$= \frac{ap + pb \times ap - pb}{4} = \frac{\overline{at}^2}{4} = \overline{ar}^2 = x = s = z = \ldots$$

e) Nel circolo c di raggio 1 (Fig. 44ª) sia iscritto un poligono di n lati essendo $n > 4$. Sopra ciascun lato come corda si costruisca la lunola ipocratica B', ed il triangolo rettangolo isoscele ahb, ne resterà formata una stella A di n punte cinta da corona di n lunole fra loro uguali, ma la somma dell'area della stella A con quella degli n triangoli ahb, costituisce quella del poligono di n lati, e poichè le aree delle n lunole sono equivalenti a quelle degli n triangoli ahb, quindi l'area della figura mistilinea formata dalla stella A e dalla corona delle lunole B' è uguale a quella del poligono iscritto di n lati.

Lo stesso accade se il poligono iscritto è irregolare, purchè uno o più dei suoi lati non sia maggiore di quello del quadrato iscritto.

CAPITOLO II.

Figure isosceliche

173. (Fig. 45ª) Due circoli di ugual raggio *ca*, *c'a'* siano fra loro secanti: con la metà *ob* della corda comune *db* si descriva la semicirconferenza *bed*; da uno degli estremi *b* della corda comune ai due circoli si tracci ad arbitrio altra corda *bn* pure ad essi comune.

Le corde come *bn*, tracciate nei due circoli secanti, per uno degli estremi *b* della corda comune *bd* alle loro intersezioni, tagliano sulle due circonferenze, a partire dall'altro estremo *d* della corda comune archi uguali: ossia arco *ds'n* = *dsa'*.

Infatti, l'angolo *dbn* è simultaneamente iscritto nei due circoli fra loro uguali e perciò intercetta sulle loro circonferenze archi uguali, ossia arco *da'* = *dn*.

Il triangolo *a'dn* è isoscele e l'arco *dhb* è retto come iscritto nella semicirconferenza *deb*, e poichè ciò si ripete per qualunque diversa inclinazione della corda *bn*, consegue che *la circonferenza di raggio* od *è luogo geometrico dei piedi delle altezze di una serie infinita di triangoli isosceli i quali come quello* a'dn, *hanno il vertice sopra un estremo* d *e la base concorrente all'altro estremo* b *della corda* db *comune ai due circoli secanti nei loro punti d'intersezione.*

I segmenti circolari come *a'ds*, *nds'* sono uguali, perchè per il già detto hanno archi e corde uguali.

Considerando il triangolo mistilineo *a'ds'n*, se dall'intera figura si toglie il segmento circolare *nds'* resta l'isoscele *a'dn*; se invece si toglie il segmento uguale *a'ds* resta il triangolo di lati curvilinei *a'sds'n*; quindi *l'area di questo triangolo mistilineo è quadrabile ed uguale a quella dell'isoscele rettilineo* a'dn.

Si dimostra in egual modo che triangolo mistilineo *s'gds* = *s'ds* isoscele.

Arco *sra'* = *s'r'n* perchè in circonferenze uguali abbracciati dallo stesso ang. iscritto *s'bn*; perciò segmento circolare *a'sr* = *ns'r'*. Considerando l'intera figura *ass'r'n*, se si toglie il segmento circolare *a'sr* resta il quadrilatero mistilineo *arss'r'n*; se si toglie il segmento uguale *ns'r'* resta il quadrilatero rettilineo *a'ss'n*, quindi l'area di questo è uguale a quella del mistilineo il quale perciò è quadrabile.

Per le esposte proprietà i triangoli curvilinei come a'sds'n, sdgs' *possono considerarsi come triangoli isosceli di lati curvilinei, ed i quadrilateri mistilinei come* a'rss'r'n *come tronchi regolari di triangoli isosceli di lati curvilinei.*

174. Tutte le figure piane di contorno rettilineo, curvilineo o mistilineo, le quali, in virtù di principii analoghi al sopraesposto hanno area quadrabile, le diremo *isosceliche.*

a) Diremo *coppia isoscelica* quella formata da due linee siano esse spezzate, curve regolari o no, ovvero miste, purchè siano fra loro uguali, giacenti sul piano e con la curvatura volta nello stesso senso ancorchè siano inversamente disposte; come (Fig. 45ª) archi *dsa'*, *ds'n* ovvero *sra'*, *s'r'n*, e (Fig. 46ª) come le coppie di linee

abd, *ab'd'* (A, B, C, D, E, F), ovvero (G) coppia costituita dalle due parti uguali *abd*, *ab'd'* di una linea a doppia curvatura *dbab'd'*.

b) Una linea isolata non può essere isoscelica, e dicendola tale, deve considerarsi come formante parte di una coppia isoscelica con altra linea ad essa uguale e rapporto ad essa disposta come si è detto.

c) Diciamo *corda di una linea isoscelica* abd (Fig. 52ª) la retta *ad* che congiunge i suoi estremi.

d) Per brevità esprimeremo il qualificativo *isoscelico* o *isoscelica*, col segno ∧.

Angoli isoscelici

175. Due linee di una coppia che si riuniscono per un loro estremo formano un *angolo isoscelico* del quale sono i lati, e vertice è il loro punto comune. Tale angolo ∧ sarà retto, acuto, ottuso, piatto e girato secondochè tale è quello delle corde delle isosceliche che lo formano.

176. **L'angolo isoscelico è misurato dall'angolo rettilineo formato dalle corde dei suoi lati isoscelici e conseguentemente esso ha per misura l'arco descritto dal suo vertice e compreso fra i suoi lati isoscelici.**

Infatti (Fig. 47ªA), sia ang. ∧ *dbaef*. Dal vertice *a* e con raggi arbitrarii *ab*, *ad* si descrivano gli archi *df*, *be*; dai punti *b*, *e* si abbassino alle corde *ad*, *af* le perpendicolari *bq*, *en*. Per l'uguaglianza dei lati curvilinei *abd*, *aef* e per essere ipotenusa $ab = ae$, risulta triangolo rettang. $bqa = ena$ e perciò angolo $baq = ean$; ag-

giungendo da ambo le parti angolo *qae*, risulta angolo *bae* = *qan*. Poichè ciò si verifica per qualsiasi raggio diverso da *ab*, ossia per tutte le coppie dei punti equidistanti dal vertice *a* dei due lati isoscelici, si vede che ang. ∧ *dbaef* = *daf* angolo rettilineo formato dalle corde dei suoi lati.

177. Consegue:

1. *Due o più angoli ∧ abbenchè formati da coppie di linee ∧ disuguali sono tra loro uguali, se gli angoli rettilinei formati dalle corde dei loro lati ∧ sono uguali fra loro.* Così (Fig. 47ª A) ang. ∧ *brase* = *dbaef* essendo angolo rettilineo *bae* = *daf* per il già dimostrato.

2. *a) Nel circolo l'angolo ∧ al centro è misurato dall'arco compreso fra i suoi lati ∧.*

b) L'ang. ∧ inscritto ha per misura la metà dell'arco che le corde dei suoi lati ∧ intercettano salla circonferenza.

c) L'ang. ∧ interno al circolo è misurato dalla semisomma, è quello esterno dalla semidifferenza degli archi intercetti dalle corde dei suoi lati ∧.

d) Nello stesso circolo o in circoli uguali, gli angoli ∧ sono uguali, se quelli formati dalle corde dei loro lati ∧ sono fra loro uguali, ed in circoli di diverso raggio gli ang. ∧ sono uguali, se le corde dei loro lati ∧ abbracciano archi equivalenti ecc.

3. *Due angoli ∧ sono uguali se gli angoli delle corde dei loro lati ∧ formano angoli opposti al vertice; in tal caso anche gli angoli ∧ diremo opposti al vertice.*

4. *Due angoli ∧ sono uguali o supplementari, se*

gli angoli rettilinei delle corde dei loro lati ∧ sono fra loro perpendicolari o parallele.

5) Quando gli angoli rettilinei delle corde di due angoli ∧ sono fra loro complementari, supplementari, esplementari, anche i corrispondenti angoli ∧ diremo *complementari, supplementari ed esplementari.*

6) *L'angolo ∧ è costruibile graficamente o no (astrazione fatta dalla costruzione dei suoi lati curvilinei) se costruibile o no è l'angolo formato dalle corde dei suoi lati ∧; e un angolo ∧ diremo costruibile o non costruibile determinabile o no, secondo che tale sia l'angolo formato dalle corde dei suoi lati ∧.*

178. **Un angolo ∧ può sempre bisecarsi e perciò decomporsi nei suoi duennesimi.**

Infatti (Fig. 47ª B), la bisettrice *ap* dell'angolo delle corde *bda* sia uguale ad una di esse; costruita la curva *aop* sulla *pa* come corda ed uguale ad uno dei lati ∧ *amb*, risulta angolo ∧ *bmaop* = ∧ *poand* = *pad* = *pab*, ossia la curva *aop* è bisettrice ∧ dell'ang. ∧ *bmand*. Con raggio arbitrario dal vertice come centro descritto l'arco *ss'* esso taglierà le curve nei punti *s*, *s'*, *s''* equidistanti dal vertice *a*, e per il già dimostrato avremo costantemente arco *ss''* = *s's''*.

Bisecando nel detto modo per *n* volte successive, l'ang. ∧ *bmand* si forma la serie dei suoi duennesimi ∧.

179. **Un angolo ∧ può trisecarsi e decomporsi nelle sue parti** 3^n **e** $3^n \times 2^n$.

Infatti, come è detto al (151) si trisechi l'angolo delle corde dei lati di quello dato ∧, e fatta la trisettrice uguale

ad una delle corde dei lati, si costruisca su di essa la linea $\wedge$ uguale al lato. Trisecando n volte l'ang. $\wedge$ dato, e bisecando n volte una delle parti ottenute, si formano gli angoli $\wedge$ che sono 3^n o $3^n \times 2^n$ di quello dato.

180. **Un angolo $\wedge$ a costruibile, ovvero sè ang. a non è costruibile ma $\frac{a}{p}$ determinabile, può graficamente dividersi per p. e conseguentemente anche in $p.2^n$ e $p.3^n$ parti uguali.**

Infatti, come al (156) diviso per p l'angolo delle corde dei lati dell'ang. $\wedge$ a, se esso è costruibile ovvero che $\frac{a}{p}$ sia determinabile, si faccia la linea *psettrice* uguale ad una delle corde dei lati dell'ang. $\wedge$ a, e si costruisca su di essa la linea $\wedge$ uguale ad uno dei detti lati. Ciò posto, bisecando o trisecando l'angolo ottenuto $\frac{a}{p}$, ne ricaveremo quelli che sono $p.2^n$ ovvero $p.3^n$ del dato angolo $\wedge$ a.

Se l'angolo a non è determinabile si opera su di esso con metodi di approssimazione, come si è detto al (157).

181. Deve farsi bene attenzione che l'uguaglianza fra due o più angoli $\wedge$ è del tutto indipendente dalla forma ed uguaglianza dei rispettivi lati $\wedge$, ma solo dipendente dalla uguale apertura dei lati $\wedge$ stessi. Ad esempio (Fig. 48ª) sui lati uguali ad, ab di un angolo rettilineo bad, come corde, si costruiscano con la curvatura volta nello stesso senso quantevogliansi coppie isosceliche acb, $ac'd$ » amb, $am'd$ » aob, $ao'd$ . . . . siano esse formate da linee spezzate curve o miste, purchè perfettamente uguali

due a due tanto prese in sè stesse quanto in referenze alle rette *ad*, *ab*; siccome le corde *ad*, *ab* comuni alle dette coppie formano l'angolo *dab*, così le varie isosceliche formano gli angoli ∧ *bcac'd*, *bmam'd*, *boao'd*. . . . Quali angoli sono fra loro isoscelicamente uguali perchè tutti misurati dallo stesso angolo rettilineo *bad* delle corde comuni.

Dato un gruppo di angoli ∧ come in (Fig. 48ª):

1. Dal vertice comune *a* e con raggio arbitrario *af* descritta la circonferenza questa interseca i lati ∧ in punti che diremo *omologhi*.

2. Per la natura stessa degli angoli ∧ avremo arco e corda $ff' = cc' = mm' = oo' = \ldots$

3. L'ang. rettilineo *bad* delle corde comuni diremo *fondamentale* del gruppo angolare.

4. *Un gruppo può costituirsi di un numero illimitato di angoli* ∧.

5. *Gli angoli di un gruppo angolare* ∧ *sono costruibili o no, determinabili o no secondo che tale sia l'angolo fondamentale* bad.

6. *Possiamo bisecare, trisecare e dividere per* p *due o più angoli del gruppo nei modi e condizioni indicate, ed operare tra i valori degli stessi angoli come si è detto per quelli rettilinei, e la parte ennesima di uno degli angoli risulta equivalente a quella di altro angolo del gruppo.*

182. (Fig. 49ª) Due linee isosceliche *bma*, *and*, inversamente disposte, s' incontrino per un loro estremo, l'angolo che esse formano diremo *isoscelico rovescio*, formato cioè da una coppia d' isosceliche inverse.

183. **L'angolo ∧ rovescio è isoscelicamente uguale a quello ∧ dritto costruito sui lati dell'angolo rettilineo delle sue corde.**

Infatti, sia ang. ∧ *bmand* e *bad* angolo delle corde. Con raggio arbitrario descritto dal vertice l'arco *bd* e tracciate le corde *ba*, *da*, per essere linea ∧ *amb* = *and*, risulta figura mistilinea *abm* = *adn*.

Ponendo la prima nel posto della seconda, l'ang. ∧ rovescio si trasforma nel rettilineo *bad*, ma questo è misura dell'ang. ∧ dritto che ha per lati uno di quelli dell'ang. ∧ rovescio, quindi ecc.:

a) Quanto si è detto per gli angoli ∧, si applica agli ang. ∧ rovesci.

b) *Un gruppo angolare ∧ nel quale entrano angoli rovesci, dicesi misto.*

184. Se due o più linee ∧ hanno le corde scambievolmente parallele, divergenti, convergenti, perpendicolari, oblique ecc., anche le linee ∧ diremo tali.

Poligoni isoscelici

185. Se le corde di due o più coppie ∧ si congiungono l'una coll'altra per i loro estremi con qualunque ordine di successione in modo da racchiudere un' area formando un poligono rettilineo, le rispettive linee ∧, siano anche inversamente disposte, racchiudono pure una area formando un *poligono isoscelico* dello stesso numero di lati di quello rettilineo. (Fig. 50ª) I poligoni P, Q, R sono isoscelici.

186. **Un poligono isoscelico è sempre pari di lati.**

Infatti esso si forma di *n* coppie isosceliche ciascuna

di due lati, e però il poligono risulta costituito di $2n$ lati $\wedge$.

a) *Un poligono isoscelico dispari di lati è tale solo in apparenza.*

Infatti (M, o) nei triangoli *mhn, m'hn'* se le rispettive basi rettilinee si considerano come formate da una sola retta, non sono isoscelici, ma se ciascuna delle basi si divide per metà in *p*, ciascuna di esse può essere considerata come un angolo piatto $\wedge$ di vertice *p*, del quale i segmenti $pm=pn$, $p'm'=p'n'$ sono nel tempo stesso lati e corde, allora i poligoni M, o si trasformano in isoscelici, ma sempre di un numero pari di lati, avremo cioè (M) triangolo mistilineo $maha'n=pmaha'n$ quadrilatero $\wedge$.

b) Il lato dispari potrebbe essere curvilineo, allora quando tale lato è divisibile in due parti tra loro uguali ed isoscelicamente disposte si cangia in polig. $\wedge$ pari di lati; così (Fig. 50ª N) nel pentagono curvilineo formato da due coppie isosceliche e dal lato curvilineo *amfne* sia questo tale da essere diviso in *f* in due parti *fma*, *fne* formanti coppia $\wedge$; il poligono si trasforma nell'esagono $\wedge$ di vertici *a*, *f*, *e*, *g*, *o*, *b*.

Per brevità diremo isoscelici anche i poligoni apparentemente tali di un numero *n* dispari di lati, i quali possono ridursi nel detto modo in poligono $\wedge$ di $n+1$ lati.

187. *Nomineremo un poligono isoscelico secondo il numero apparente dei suoi lati.*

a) *Gli angoli perimetrali interni del polig.* $\wedge$ *possono essere isoscelici o no.*

b) *Il polig.* $\wedge$ *può costituirsi di lati appartenenti a coppie* $\wedge$ *dirette o inverse.*

c) *Il polig.* ⋀ *può essere iscrittibile o no*, dicesi *iscritto* quando i vertici del suo poligono rettilineo delle corde trovansi sulla circonferenza,

d) Il polig. ⋀ può essere *regolare* o *irregolare*. Esso è *regolare* quando il suo poligono rettilineo delle corde è regolare iscrittibile, qualunque sia la forma dei lati isoscelici del poligono.

Il centro e i raggi del polig. delle corde diconsi anche centro e raggi del corrispondente isoscelico.

e) Il polig. ⋀ è *semplice o composto*. Dicesi *composto* quando esso si forma di due o più polig. ⋀ combinati in modo da formare una sola figura.

f) Due poligoni ⋀ sono fra loro uguali se hanno lati e corde uguali ed ugualmente disposte.

188. **L'area di un poligono isoscelico è equivalente a quella del suo poligono rettilineo delle corde.**

Infatti (Fig. 50ª Q), nel quadrilatero ⋀ *hedmnz* sia lato ⋀ $hzb = dmh'$ e lato ⋀ $hed = bnh'$, avremo anche segmento circolare $hbz = dh'm$ e figura $hde = bh'n$. Ponendo il segmento $dh'm$ nel posto del suo uguale hbz e la figura hde nel posto della sua uguale $bh'n$, il poligono ⋀ si trasforma nel quadrilatero rettilineo $hbh'd$, e perciò polig. ⋀ $hedmnz = hbh'd = hb \times h'p$.

In modo analogo si dimostra l'equivalenza di altro poligono ⋀ a quello rispettivo delle corde qualunque sia il numero dei suoi lati ⋀.

189. **Gruppi poligonali isoscelici**

(Fig. 51ª) il poligono rettilineo *abcdef* sia pari di lati qualunque sia il numero pari di essi; detti lati

siano due a due fra loro uguali comunque ordinati nel perimetro.

Sopra ciascuna delle *m* coppie di lati uguali come corde, si costruiscano quante vogliansi coppie di linee isosceliche direttamente o inversamente disposte, ne risulteranno formati altrettanti poligoni isoscelici che hanno comune il poligono rettilineo *abcdef* delle corde. L'insieme di tali poligoni $\wedge$ costituisce un *gruppo poligonale isoscelico*, del quale il poligono rettilineo delle corde diremo *fondamentale.*

1. *Il gruppo* $\wedge$ *si dirà quadrilatero esagonale, ottagonale . . . . se il suo poligono fondamentale è un quadrilatero, un esagono. . . . . ecc.*

2. *I poligoni* $\wedge$ *di un gruppo* $\wedge$ *sono infiniti.*

3. *I polig.* $\wedge$ *di un gruppo sono iscrittibili non iscrittibili regolari o no ecc. secondochè tale è il poligono fondamentale.*

4. *Per il precedente teorema l'area di ciascun poligono* $\wedge$ *di un gruppo è equivalente a quella del suo poligono fondamentale, e conseguentemente le aree di due poligoni qualunque del gruppo sono fra loro equivelenti.*

5. *Fra due o più poligoni di un gruppo possono scambiarsi le coppie isosceliche variando in molti modi la forma dei poligoni stessi*, ossia formandone altri polig. $\wedge$ del medesimo gruppo. Ad esempio (Fig. 51ª) dei polig. $\wedge$ *xmnx'n'm'*, *orzo'z'r'*, scambiando le isosceliche *amb*, *fme* del primo con quelle *arb, fr'e* del secondo, tutti aventi la stessa corda *ab* = *fe*, ne resteranno formati due altri poligoni $\wedge$ *xrnx'n'r'*, *omzo'z'm*, i quali appartengono allo stesso gruppo $\wedge$, sono equivalenti l'uno all'altro e ad uno qualunque degli altri poligoni del gruppo

ed hanno per comune misura l'area del poligono fondamentale del gruppo stesso.

190. Due o più gruppi poligolani $\wedge$ si dicono *equivalenti* se sono tali le aree dei rispettivi polig. fondamentali; ad esempio in due polig. rettilinei di n lati dei quali ogni lato dell'uno è uguale ad uno di quelli dell'altro, sebbene diversamente ordinati, e sono anche iscrittibili nello stesso circolo, le loro aree sono equivalenti, assumendo questi poligoni come fondamentali di due gruppi $\wedge$ questi sono tra loro equivalenti.

In ugual modo un triangolo di altezza h è equivalente al rettangolo della stessa base e di altezza $\frac{h}{2}$, e questo equivalente a tutti i parallelogrammi che hanno la sua base ed altezza; quindi i gruppi $\wedge$ che hanno per polig. fondamentale il triangolo o il rettangolo equivalente o uno dei parallelogrammi equivalenti a questo sono equivalenti.

Consegue che nelle operazioni possono sostituirsi le une alle altre le figure appartenenti a gruppi equivalenti, facoltà che permette di variare all' infinito la forma di una data figura senza alterarne il valore.

191. *I lati isoscelici di un poligono possono essere archi di una data curva geometrica e allora il poligono prende nome da questa curva*, ossia diremo *circolare, elissoidale parabolico, iperbolico cassinoidale* ecc., un poligono $\wedge$ che si forma di archi di circolo o di una ellisse, della parabola, della iperbola, della cassinoide... ecc.

Se si considera che tutti i poligoni isoscelici sono quadrabili e possono assumersi come basi di altrettante figure solide, si vedrà l' importanza che hanno le figure isosceliche nella pratica.

192. **Quadrilateri isoscelici e triangoli ∧ apparenti.**

Il quadrilatero isoscelico, formandosi di due coppie ∧, consegue che in genere il suo poligono delle corde è un parallelogramma o un romboide, formato cioè di due triangoli isosceli di ugual base che sono riuniti per questa base, e perciò qualunque sia la forma apparente del quadriletero ∧ quello corrispondente delle corde sarà o il quadrato o il rettangolo o il parallelogramma o la losanga o il romboide (Fig. 50ª P, Q, S).

Consegue che nel quadrilatero ∧, escluso il caso in cui il quadrilatero delle corde è un romboide, i lati isoscelici opposti sono paralleli e le sue diagonali si tagliano per metà.

a) Il quadrilatero ∧ può avere un angolo rientrante, allora la sua area è differenza tra due triangoli isosceli. Così (Fig. 50ª, M) i triangoli mistilinei *maha'n*, *msos'n* abbiano comune la base *mn* e ciascuno lati isoscelici. Poichè triang. *maha'n* = *mhn* e triangolo *msos'n* = *mon* sarà evidentemente quadrilat. ∧ *hamsos'na'* = *mhn* — *mon* = *hmon* quadrilatero rettilineo di angolo rientrante.

b) Nel quadril. ∧ due lati ∧ consecutivi potrebbero confondersi nel loro punto di contatto in una curva apparentemente continua, allora il quadrilatero ∧ si cangia per la sua apparenza nel triangolo ∧.

Triangoli isoscelici.

193. *Ripetiamo che i triangoli ∧ sono in sostanza quadrilateri ∧.* Così (Fig. 52ª, A, B) i triangoli ∧ *ambcd*

di vertice *d* sono quadrilateri dei quali quello delle corde è *abcd*.

Consegue che **in triangoli ∧ come** A,B **il lato ∧ maggiore** *ambc* **è somma dei lati ∧ minori cioè** *doa* + *dsc*: ossia in tali triangoli il lato maggiore si forma dei due lati minori riuniti per un loro estremo in modo da formare una sola linea apparente.

194. *L'area di un triang. ∧ è uguale a quella del suo quadrilatero delle corde.*

195. Vi sono molte specie di triangoli ∧, fra le quali quelle che maggiormente interessano la geometria si formano di triangoli ∧ che hanno per lati archi di curve geometriche, ma in questo limitato lavoro ci occuperemo soltanto dei triangoli circolari, dei quali cioè i lati sono archi di circolo, inquantochè essi si costruiscono mediante la riga ed il compasso ed appartengono perciò alla geometria elementare.

196. I triangoli circolari di area quadrabile si distinguono in *sferici* ed in *isoipocratici*.

Diciamo *sferici* quelli dei quali i tre lati sono archi dello stesso circolo o di circoli uguali, purchè la loro somma non sia maggiore di 360° circonferenza. *I triangoli sferici isoscelici sono quadrabili.* (Fig. 53ª) I triangoli isoscelici *afdh'z*, *dfahz'* sono sferici.

Diciamo *isoipocratici* quelli che si formano della somma o differenza di una lunola ipocratica e di un triangolo ∧.

Così (Fig. 54ª) nel triangolo curvilineo *bhaz'or'* sia *ambh* lunola ipocratica, e sia arco *br'o* = *brm* ed arco *az'o* = *azm*, e perciò il triangolo *bmazor'* isoscelico, tanto questo triangolo quanto la lunola ipocratica sono quadrabili, quindi è quadrabile anche il triangolo *bhaz'or'* costituito dalla loro somma. Tale triangolo *è isoipocratico per somma.*

Sia *budh'* lunola ipocratica, e sia arco *dse* = *ds'h'*, arco *bne* = *bn'h'* quindi il triangolo *dh'bnes* è isoscelico: tanto questo triangolo quanto la lunola sono quadrabili, è perciò quadrabile anche il triangolo *dubnes* che si forma della loro differenza. Il triang. *dubnes* è *isoipocratico per differenza.* Sia per ipotesi arco *or'b* = 90°, sulla sua corda *ob* come diametro descritto il semicircolo *oqb* risulterà *or'bq* lunola ipocratica, ed avremo triangolo curvil. *oqbhaz'* = triang. ∧ *bhaz'or'* — *or'bq* lunola; ma queste due figure sono quadrabili e perciò è tale anche il triangolo *oqbhaz'* il quale è *isoipocratico per differenza.*

197. *Un triangolo sferico dicesi iscritto o iscrittibile quando è tale il suo quadrilatero rettilineo delle corde.*

198. Sarà facile dimostrare i seguenti teoremi:

a) *Fra i triangoli sferici sono iscrittibili quelli dei quali il quadrilatero delle corde è un rettangolo.*

b) *I triangoli sferici iscrittibili nello stesso circolo o in circoli uguali sono isoperimetri.*

c) *Fra i triangoli sferici iscrittibili nello stesso circolo o in circoli eguali, quello di area maggiore ha*

il quadrato come quadrilatero delle sue corde. Detto triangolo sferico è in sostanza *il quadrilatero* ∧ *regolare.*

d) *Fra i poligoni* ∧ *costituenti un gruppo* ∧ *che ha per fondamentale un quadrilatero rettilineo vi è sempre un triangolo circolare, e se il detto quadrilatero è un parallelogramma o romboide il triangolo del gruppo è sferico.*

199. **Dato un triangolo sferico possono costruirsi quanti vogliansi altri triangoli sferici ad esso equivalenti.**

Infatti (Fig. 55ª), sia dato il triang. sferico *fdbmam'* del quale il quadrilatero delle corde sia di base *ab* ed altezza *bd*. Si costruisca un parallelogramma qualunque *bgho* di ugual base ed altezza, e per gli estremi *b*, *o*, *h*, di due suoi lati consecutivi formanti angolo non acuto, si faccia passare l'arco *boh*. Si faccia arco *gn'h* = *bno* ed arco *bs'g* = *osh*, nè resterà formato il triang. sferico *bohn'gs'* equivalente a quello *fdbmam'*, inquantochè essi hanno i quadrilateri delle corde equivalenti. Si faccia il romboide *bohp* di lati uguali a quello del parallelogramma *bohg*, essi sono equivalenti e perciò anche i triangoli sferici costruiti sui loro lati come corde sono fra loro equivalenti.

Dal sopra esposto si vede la facile trasformazione delle figure isosceliche. Può un quadrato ridursi a poligono rettileo, questo in poligono isoscelico o in figura isoscelica di contorno curvilineo continuo, o in triangolo isoscelico formato di archi descritti con diverso raggio, ecc.

200. **L'area di un triangolo sferico ed in genere di una figura isoscelica può decomporsi in parti proporzionali.**

(Fig. 56ª) L'area del triangolo sferico *abdseo* di vertici *a*, *d*, *e* voglia dividersi in tre parti che stiano fra loro come $m : n : z$.

Sia *aedb* quadrilatero delle corde del triang. sfer. Si divida la corda *de* in modo che segmento $dp : pq : qe :: m : n : z$.

Per i punti *p*. *q* si traccino le parallele alla *bd* ad incontrare in *n*, *r* il lato maggiore del triang. sfer. Si tirino le corde *br*, *rn*, *na*, *ds*, *sm*, *me*, e sui segmenti *mn*, *sr* come corde e con lo stesso raggio dei lati del triang. sf., si descrivano gli archi *nvm*, *rxs*.

Per l'uguaglianza dei segmenti curvilinei *bar*, *des* risulta $sp = rh$ » $mq = ni$, ossia $rs = hp = iq = mn$.

I parallelogrammi *hpdb*, *iqph*, *aeqi* avendo la stessa altezza stanno fra loro come le rispettive basi, e perciò $hpdb : iqph : aeqi :: dp : pq : qe :: m : n : z$.

Ma per avere ugual base ed altezza il parallelogramma $hpdb = rsdb =$ triang. sf. *sxrbd* : parallelogramma $iqph = nmsr =$ quadril. ∧ *nvmsxr* ; e finalmente parallelogramma $aeqi = aemn =$ quadrilatero ∧ *aoemvn*, e perciò *sxrbd* : *nvmsxr* : *aoemvn* :: $m : n : z$; ma ciascuna delle parti in cui si è decomposto il triang. sf. può graficamente trasformarsi in altra figura isoscelica equivalente la quale sia in ugual rapporto con una figura isoscelica equivalente al triangolo sferico, quindi ecc.

201. (Fig. 57ª A) **In un triangolo sferico** f bazez', **i tre lati circolari che lo formano prolungati s'incontrano in un punto** s

il quale è sulla perpendicolare abbassata dal vertice *e* **del triangolo sf. alla corda** af **del suo lato arco maggiore** abf.

Infatti, siano *c*, *c'*, *c''* i centri dei circoli di ugual raggio ai quali appartengono gli archi formanti il triangolo sferico; dai centri *c*, *c'*, *c''* si prolunghino i lati circolari di questo.

I circoli secanti *c'*, *c''* hanno *es* per corda comune e la linea *c' c''* dei centri è ad essa perpendicolare e la divide per metà; il quadrilatero *c'ec''s* è una losanga. I circoli secanti di ugual raggio *c*, *c'* hanno la *as* come corda comune, e la linea *cc'* dei centri cade perpendicolare sulla sua metà; quindi tracciate le *cs*, *ca*, il triangolo *acs* risulta isoscele e perciò *cs* = *ca* raggio, ossia il lato arco maggiore *fba* prolungato passa per il punto d'intersezione *s* del prolungamento degli archi minori *aze*, *fz'e* lati del triang. sf.

Si prolunghi la *se* ad incontrare in *b* l'arco *abf*, e si traccino le *ab*, *ae*. Nei circoli secanti di ugual raggio *c*, *c'* le corde comuni *sa*, *se* formano l'angolo *asb* iscritto simultaneamente nei due circoli ed avremo arco e corda *ab* = *ae*, ossia triang. *eab* isoscele (172). Si abbassi *ah* perpendicolare alla *eb* ad incontrare in *f* la circonferenza *c* e si traccino le *fb*, *fe*; risulta triang. *efb* isoscele, ossia il quadrilatero *aefb* è un romboide, ed essendo *e* vertice del dato triang. sf il romboide *aefb* è suo quadrilatero delle corde, e perciò la *sb* è perpendicolare alla *af* corda del lato circolare maggiore *abf* del dato triang. sferico.

Consegue, che per tutti i triangoli sferici aventi per lato maggiore l'arco *abf*, il luogo geometrico del punto d'intersezione *s* comune al prolungamento dei loro lati curvilinei, è l'arco *a'sf'* inverso ed uguale a quello *abf*.

202. *Il punto d'intersezione comune* s *al prolungamento dei tre lati circolari di un triangolo sferico, diciamo* suo nodo sferico.

203. **Una direzione dal nodo di un triangolo sferico che incontra i suoi lati, determina su questi e loro prolungamenti archi uguali, compresi tra la direzione e la perpendicolare abbassata dal nodo sferico alla corda del lato arco maggiore del triangolo sf., ovvero la stessa direzione e quella che unisce il nodo sf. con l'estremo comune a due dei detti lati.**

Infatti (Fig. 57 A), sia la radiante *sa* che incontri in *r*, *a* i lati o loro prolungamenti del triang. sf. *fbazez'*: poichè i circoli *c*, *c'*, *c''* hanno uguale raggio, l'angolo *asb* iscritto simultaneamente nei tre circoli abbraccia sulle loro circonferenze archi uguali, avremo cioè arco e corda $rne = eza = amb$. Sia qualunque altra direzione *sm*, per l'angolo *msb* iscritto nei tre circoli *c*, *c' c''* avremo ugualmente arco e corda $ne = ez = mb$, e per l'angolo *asm* sarà arco $rn = az = am$.

(Fig. 57ª B) *a*) Quando la distanza *es* tra il vertice *e* del triangolo ed il nodo sf. è uguale alla corda *ea* del lato circolare *aze* avremo ang. $hsb = \frac{hab}{3}$, poichè sono tre i segmenti uguali $se = ea = ab$ portati dal vertice con i loro estremi dall'uno all'altro lato dell'angolo *hsb*, e sappiamo dal principio generale sul quale si basa la costruzione degli angoli (26), che allora ang. $hab = 3.hsb$, ossia $hsb = \frac{hab}{3}$.

204. (Fig. 57ª c) Le figure che le varie direzioni dal nodo sferico *s* formano con gli archi che intercettano sui lati curvilinei del triangolo sferico e loro prolungamenti, sono tutte isosceliche, ossia di area quadrabile. Avremo così quadrilatero ∧ *bmr'r''* » *bma'e* » *baze*.... e triang. ∧ *maa'* » *aeb*.... tutti quadrabili ecc.

205. (Fig. 57ª c) Col raggio *ca* del triang. sf. e centro nel nodo sf. *s* si descriva la circonferenza che diremo *sferica* rapporto al triang. sf.

Da qualsiasi punto *o*, *o'*, *d*, *d'*, della circonferenza sferica come centro e con lo stesso raggio del triang. sf. descritte le circonferenze, gli archi di queste intersecati dalle direzioni tracciate dal nodo sferico ad incontrare il triang. sf. sono fra loro uguali: avremo cioè arco e corda $zz' = rr' = cp = aa' = \ldots . cx = z'e = r'r'' = r''c = mb \ldots . zz'e = xcp = amb$ .. ecc.

1. *Come si è detto al precedente, le figure formate da due archi qualunque, con le radianti dal nodo che le racchiudono, sono tutte di area quadrabile.*

2. *I centri* c, c', c'' *dei lati circolari del triangolo sferico* fbaa'e *sono sulla circonferenza sferica.*

3. *I vertici* a, e, f *del triangolo sferico sono centri dei lati circolari di un secondo triangolo sferico di vertici* c, c', c'' *uguale al primo ed inversamente disposto.*

4. *I due triangoli sferici, dei quali i vertici dell'uno sono centri degli archi costituenti i lati dell'altro, diconsi* coniugati.

5. *Il nodo sferico* s *del triangolo sferico di vertici* a, e, f, *è anche coniugato col nodo sferico* s' *del triangolo sferico di vertici* c, c', c'',

6. *L'uguaglianza e simmetrica disposizione di due o più triangoli sferici tra loro coniugati genera tante combinazioni isosceliche, le quali non ci è permesso svolgere in questo lavoro.*

7. Non deve confondersi il triangolo sferico isoscelico, che è figura quadrabile, con quello detto sferico perchè delineato sulla superfice della sfera, del quale trattano la geometria e la trigonometria.

206. La maggior parte delle proprietà dei triangoli sferici Λ si estendono ai triangoli Λ formati con archi di curve geometriche diverse dal circolo.

Le curve geometriche si distinguono in *chiuse* come l'*ellisse*, la *cassinoide*, la *cicloide* ecc., ovvero *aperte* quali la *parabola*, l'*iperbola* ecc.

a) Nelle curve regolari chiuse e simmetriche alle due loro assi coordinate, sono iscrittibili tanto i parallegrammi quanto i romboidi, e perciò tutte le figure isosceliche dei quali sono quadrilateri delle corde. In questo, tali curve sono superiori al circolo nel quale s'iscrivono i soli rettangoli.

Nelle curve geometriche aperte s'iscrivono i soli trapezi, talchè una figura isoscelica semplice non può avere che tre soli dei suoi vertici sopra una di queste curve.

207. Come nei triangoli sferici, *se due o più triangoli Λ costruiti con archi di una data curva geometrica hanno uguale l'arco maggiore essi sono isoperimetri ed equivalenti.*

208. Iscrivendo in totalità o per tre vertici un quadrilatero Λ o triangolo apparente isoscelico in una curva geometrica degli archi della quale si compongono i lati del triangolo Λ, non solo si ottiene la misura di un frammento

dell'area racchiusa dalla curva, ma tale frammento può decomporsi in parti uguali e proporzionali, o in figure varie tra loro equivalenti o in un dato rapporto. Ad esempio:

(Fig. 58ª) La curva *fabdg* sia parte di *ellisse, di parabola, d' iperbola* . . .; s'iscriva in essa per tre vertici la losanga *abde*, si facciano archi $dm'e = an'e = bnd = bma$.

L'area del triangolo $\wedge$ è $ambndm'en' = abde$. Sulle curve *bnd*, *an'e* i punti *n*, *n'* diano corda $nb = nd$, $n'a = n'e$, tracciata la *nn'* si costruisca su di essa curva $nsn' = bma$.

Evidentemente triangolo $\wedge$ $n'snbma = em'dnsn'$ quadrilatero $\wedge$, e ciascuna di queste figure è metà del triangolo $\wedge$ $ambndm'en'$. Triangolo mistilineo $bman'e = bndm'e$ e ciascuno metà del triangolo $\wedge$ $ambndm'en'$; quindi $bman'e = n'snbma$: togliendo da ambo le parti *bsn*, resta quadrilatero mistilineo $bsn'am = sndm'e$, da cui si deduce triangolo $\wedge$ $bns = sn'e$ . . . . ecc.

209. Il metodo delle isoscieliche conduce talvolta col solo esame di una figura formata con archi di una data curva geometrica alla determinazione di alcune proprietà di quella curva, le quali per essere stabilite mediante il calcolo, richiederebbero complicate e difficili operazioni. Ad esempio:

(Fig. 59ª) Sia la *cicloide mnr'sr*, della quale è noto che la base *mn* è la circonferenza rettificata $2\pi r$, e la freccia *as* è il diametro del circolo generatore $2r$. Si costruisca il triang. $\wedge$ *cicloidale mozo'nr'sr* del quale l'area è $A = msnz$; ma $msnz = mn \times as = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$; e facendo $r = 1$ avremo $A = 4\pi$: ossia *L'area del triangolo cicloidale è quadrupla di quella del circolo generatore.*

a) Consegue che, *Data la possibilità di costruire una cicloide rigorosamente esatta, il problema della quadratura del circolo sarebbbe risoluto, avendosi infatti*

$$\pi = \frac{msnz}{4} = mas.$$

b) Dimostra la geometria analitica che l'area H della cicloide è il triplo di quella del circolo generatore, ossia H = 3.*mas*, quindi *triangolo mistilineo di lati cicloidali concavi* mozo'n = mas = π ecc.

Ma non vogliamo uscire dai limiti della geometria elementare più di quel tanto che ci è rigorosamente imposto dalla necessità di far valere l'importanza della geometria piana curvilinea; anzi, incalzati dalla abbondanza della materia, abbandoniamo i teoremi che riguardano i poligoni Λ in genere, e ci limitiamo a svolgere solo alcuni caratteri e proprietà dei poligoni Λ regolari di lati circolari.

210. **Poligoni regolari Λ di lati circolari.**

In genere si classificano fra i regolari tutti quei poligoni isoscelici dei quali il poligono delle corde è regolare, qualunque sia la forma e disposizione successiva dei lati dell'isoscelico (187.*d*), e però la varietà dei poligoni regolari isoscelici è grandissima.

I poligoni regolari isoscelici, dei quali i lati Λ sono archi di circolo, diconsi *circolari*; tra questi si distinguono quelli dei quali gli archi che ne formano i lati sono descritti con lo stesso raggio del circolo circoscrittibile al poligono Λ.

Per essere brevi, parleremo di questa sola spece, trascurando tutte le altre.

209. L'espressione por ∧ indica *un poligono circolare regolare isoscelico.*

a) Nomineremo un p.c.r ∧ secondo il numero dei lati del poligono regolare rettilineo formato dalle corde che sottendono gli archi circolari costituenti la metà di ciascuna coppia ∧ del primo. Così (Fig. 60ª), diremo *ottagoni* c.r ∧ le figure A, B, C, sebbene essi siano quadrilateri ∧ nei quali ciascun lato ∧ si forma della coppia di archi uguali l'uno saliente e l'altro rientrante.

b) *Centro e raggio* del por ∧ sono quelli stessi *c*, *ca* del circolo ad esso circoscritto.

c) Nel por ∧ *il raggio si dice isoscelico* quando è diretto all'estremo di uno dei lati costituenti una coppia ∧ perimetrale del poligono. Così (Fig. 60ª A) *ca*, *ch* sono raggi ∧.

d) Consegue che i raggi ∧ di un por ∧ sono tanti quante le coppie isosceliche che ne formano il perimetro

e) **Il raggio ∧ può essere anche curvilineo o mistilineo**, come $cna = cn'h = cn''f = cn'''d$, inquantochè possiamo sempre supporre che la *cna*, girando intorno al suo estremo *c*, con l'altro estremo *a* descriva la circonferenza.

f) Il por ∧ è anche circoscrittibile; raggio del circolo in esso iscritto è la *cs* congiungente il punto medio *s* di uno degli archi rientranti perimetrali del poligono col centro *c*.

g) L'*apotema* del por ∧ è quello stesso *cp* del poligono rettilineo costituito dalle corde dei suoi semilati ∧.

210. **Il perimetro di un por ∧ è uguale alla circonferenza ad esso circoscritta.**

Infatti (Fig. 60ª A, B, C) detto perimetro si formà degli n archi uguali nei quali la circonferenza ad esso circoscritta resta divisa dai vertici del poligono rettilineo regolare iscritto, il quale dà nome a quello isoscelico. Consegue che:

a) *Se* n *è numero dei lati* ⋀ *del* por ⋀, *il valore circolare di un suo lato è* $\frac{360^\circ}{n}$.

b) **I poligoni** or ⋀ **dello stesso raggio e numero di lati sono isoperimetri.**

211. **L'area di un** por ⋀ **di** n **coppie isosceliche è equivalente a quella del poligono regolare di** $2n$ **lati rettilinei dal quale prende nome.**

Infatti (Fig. 60ª A, B, C) il perimetro di un por ⋀ di n lati ⋀ si forma di $2n$ archi circolari fra loro uguali, dei quali metà sono salienti e metà rientranti; di questi archi sono corde i $2n$ lati del poligono regolare rettilineo che dà nome a quello isoscelico; ciascun arco con la rispettiva corda, forma un segmento circolare, ed insieme $2n$ segmenti circolari fra loro uguali, dei quali metà salienti e metà rientranti.

Nella formazione del por ⋀, gli n segmenti circolari salienti sono in aumento dell'area del poligono regolare rettilineo di $2n$ lati, mentre gli n segmenti circolari rientranti sono in diminuzione dell'area stessa; e poichè la somma delle aree dei segmenti salienti è uguale a quella dei rientranti, togliendo dalla figura isoscelica i primi e ponendoli nel posto dei secondi, il por ⋀ si trasforma nel poligono rettilineo dal quale prende nome.

Consegue *che due o più* por ⋀ *di ugual raggio e numero di lati sono equivalenti.*

212. In un circolo, dato un poligono regolare iscritto di n lati, e la serie duennesima crescente dei poligoni di un doppio numero di lati, anche la serie duennesima del per Λ equivalente al poligono iniziale di n lati, si forma dei per Λ equivalenti rispettivamente ai termini successivi della serie duennesima del poligono rettilineo di n lati, e però:

a) In una serie di per Λ *iscritti nello stesso circolo o in circoli uguali, dei quali i lati procedono in serie duennesima, il termine più avanzato nella serie ha l'area maggiore.*

b) Detta serie duennesima è infinita, e l'area di un per Λ *di una serie duennesima può approssimarsi quanto si voglia al valore* π *dell'area del circolo circoscritto alla serie, senza poterlo mai raggiungere; quindi* π *è il limite della serie* Λ.

c) Questo limite π *nel circolo di raggio* 1 *è espresso in valore lineare curvilineo dal semiperimetro di un* per Λ *qualunque della serie o della semicirconferenza, ed in valore quadrato dall'area del circolo.*

213. **Nel circolo di raggio 1, data una serie duennesima di poligoni regolari iscritta e la corrispondente serie duennesima dei per Λ, l'area dello stesso termine rettilineo o isoscelico circolare è data in valor lineare dal semiperimetro del poligono rettilineo che precede nella serie quello contemplato.**

Infatti (Fig. 61ª) nel circolo di raggio $cd = 1$, sia ab lato di poligono regolare iscritto di n lati. Si bisechi l'ang. acb; sarà db lato del poligono di $2n$ lati. Si costruisca il quadrilatero Λ $cbmdna$, esso è equivalente al

quadrilatero rettilineo *cbda*, e poichè il opr Λ è pari di lati, esso si costituisce di n quadrilateri isoscelici, ed è equivalente ad $n \times cbda$, ossia all'area del poligono regolare di $2n$ lati; ma $cbda = \frac{cd \times ab}{2} = \frac{1.ab}{2} = \frac{ab}{2}$; quindi l'area del poligono regolare di $2n$ lati è $\frac{n \times ab}{2}$, ossia il semiperimetro del poligono che immediatamente lo precede nella serie duennesima.

Diamo un esempio di applicazione del detto principio.

214. **Calcolare il numero π, rapporto della circonferenza al diametro.**

Il lato del triangolo equilatero iscritto nel circolo di raggio 1 è $l = \sqrt{3} = 1.7321$, quindi l'area dell'esagono regolare iscritto è $a_1 = \frac{1.7321 \times 3}{2} = 2.59815$.

Il lato dell'esagono è $l' = 1$, e però l'area del dodecagono è $a_2 = \frac{1 \times 6}{2} = 3$.

Il lato del dodecagono è $l'' = 0.5176$, e quindi l'area del poligono regolare di 24 lati è $a_3 = \frac{0.5176 \times 12}{2} =$ $= 3.1056\ldots$ così proseguendo, poichè al (103) abbiamo dato un modo rapido per calcolare il lato del poligono di $2n$ lati quando sia noto quello di n lati, potremo avvicinarci facilmente e colla maggiore approssimazione desiderabile al valore π.

215. **Dato un por Λ iscritto si può formare la serie dei por Λ dei quali le aree siano in progressione duennesima.**

(Fig. 60ª B) Infatti sia iscritto il por Λ di n lati $efghi$, come al (166) si costruisca una serie di circoli di raggi $c'g$, $c'g'$, $c'g''$ .... in progressione duennesima decrescente. In ciascun circolo s' iscriva un por Λ dello stesso numero di lati circolari di quello dato $efghi$; sarà facile dimostrare che le aree e perimetri così costruiti decrescono in progressione duennesima, e al pari delle serie duennesime ipocratiche, avremo in quanto alle aree: por Λ di raggio $c'g : c'g' : c'g'' : c'g''' \ldots$ :: anello poligonale Λ $c'g - c'g' : c'g' - c'g'' : c'g'' - c'g''' : \ldots$ :: settore Λ $hgfc' : h'g'f'c' : h''g''f''c' \ldots$ ecc. ..... ::

$$:: 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots \frac{1}{2^n} :: 1 : \frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

e dà ciò anche anello poligonale

$$c'g'' - c'g''' = \frac{c'g - c'g'}{4} = hh'g'f'fg,$$ ed anche quadrilatero Λ

$$c'h'g'f' = \sqrt[3]{c'f'''g'''h'''}$$ ecc.

In quanto ai perimetri, poichè *in un circolo di area* π *la circonferenza è* 2π, *e però il rapporto che passa tra due circoli passa ancora tra le rispettive circonferenze*, così nella suddetta serie duennesima di por Λ, chiamando $p, p', p'', p''', \ldots p^n$ i perimetri dei poligoni successivi della serie, avremo

$$p : p' : p'' : p''' : \ldots p^n :: \frac{p}{n} : \frac{p'}{n} : \frac{p''}{n} : \ldots$$ :: semilato Λ ossia arco circolare $\frac{p}{m} : \frac{p''}{m} : \frac{p'''}{m} \ldots\ldots$ :: arco $\frac{p : m}{2^n} : \frac{p' : m}{2^n} : \frac{p'' : m}{2^n}$; e se il valore dell'angolo $p : m$

è divisibile per k, qualunque sia numero k, e che l'arco $p : m$ non sia rientrante, avremo anche

$$\frac{p : m}{k} : \frac{p' : m}{k} : \frac{p'' : m}{k} : \frac{p''' : m}{k} :: p : p' : p'' : p''' \ldots\ldots$$

.... ecc.: talchè *tutte le operazioni che sono possibili tra i valori angolari, lo sono anche tra aree e perimetri dei* per ∧ *di una serie duennesima e tra le loro parti come sopra indicate.*

216. **Un per ∧ può frazionarsi in figure di area equivalente, o delle quali le aree siano in un voluto rapporto.**

Infatti (Fig. 60ª A) possiamo decomporre un dato per ∧ di n lati ∧ in n quadrilateri ∧ $hz'gzfc$, e come al (200) possiamo decomporre il quadrilatero ∧ in parti eguali o proporzionali $m, p, z \ldots q$, e le corrispondenti parti eguali o proporzionali del per ∧, sono date dalle figure composte con quelle ottenute mn, pn, zn, ... qn.

217. **La somma dell'area di un per ∧ con quella del circolo ad esso circoscritto è il doppio del poligono regolare rettilineo che dà nome al per ∧.**

Infatti (Fig. 60ª B) abbiamo per ∧ di vertici $a, b, g, h, i =$ $= abdef \ldots i$ poligono rettilineo regolare; ma il diametro gb divide il per ∧ nel semicircolo gbe e nel semipoligono circolare di archi rientranti e di vertici g, h, i, a, b: duplicando trovasi $c' + gebaih = 2\ abdef \ldots i$.

a) Chiamando A' l'area del poligono circolare, e P quella dal poligono regolare rettilineo, abbiamo $\pi + A =$ $= 2P$, e dividendo per n » $\frac{\pi + A}{n} = \frac{P}{2n}$; ossia *la somma dei due settori circolare e poligonale è* gnhc'+gmhc'= = 2ghc'; da ciò emerge il seguente:

218. (Fig. 62ª) Sia un triangolo di base rettilinea e di lati curvilinei uguali inversamente curvati, come i triangoli *ambm'd*, *enbn'f*. Si abbassi dal vertice alla base la perpendicolare *bh*, e si tracci una direzione *bs* ad incontrare la base prolungata senza tagliare il lato del triangolo; avremo che:

La somma $sbma+sbm'd$, ovvero $sbne+sbn'f$ dei triangoli mistilinei, è uguale al doppio **del triangolo rettangolo** shb, **ossia essa è uguale al rettangolo** $\frac{sh}{2}\times hb$.

Infatti triang. mistilineo $bhdm'=bham$. Si sovrapponga il primo al secondo e tracciata la *bs* ne resta formato il triangolo rettangolo $bhs=sbma+hbma$; perciò $sbma+hbma=shb$ e $sbm'd-(hbm'd=hbma)=shb$: quindi $2shb=\frac{sh}{2}\times hb$.

219. Sia iscritto nella circonferenza un polig. regolare di *n* lati, e l'arco sotteso da ciascun lato sia diviso in due archi uguali; con questi $2n$ archi come lati, a partire dai vertici del poligono, si costruisca come alla (Fig. 63ª A, B, C, D, E) una serie decrescente di poligoni circolari, dei quali i vertici salienti dell'uno coincidano con quelli volti verso il centro *c* dell'altro, finchè ciò possa effettuarsi senza che gli archi si taglino. Si congiungano con rette i vertici del poligono più piccolo volti verso il centro, quando non accada che coincidano in questo punto, e ne resterà formato un poligono regolare simile all' iniziale iscritto di *n* lati.

Gli *m* poligoni circolari così costruiti formano, a partire dalla circonferenza verso il centro, *m* corone composte ciascuna di figure curvilinee uguali.

Vedesi dal solo esame della (Fig. 63ª A, B, C, D, E) che essendo n il numero dei lati del polig. reg. iniziale iscritto, quello delle dette corone è $\frac{n}{2}$, e che a partire dalla circonferenza verso il centro, $\frac{n}{2} - 1$ di tali corone sono isosceliche, ossia formate di figure $\wedge$. La sola corona non isoscelica è quella che ha il perimetro interno comune col poligono simile a quello regolare iniziale come in B, D, E, ovvero i vertici interni al centro c, come in A, C.

220. È evidente che *i poligoni circolari costruiti, come si è detto, sono isoperimetri col circolo, talchè se questo ha il raggio unitario, il loro valore è* 2π; *conseguentemente il doppio perimetro di ciascuna corona* $\wedge$ *è* 4π.

221. *Chiamando* H *l'area della corona non isoscelica del gruppo, la somma* S *delle aree di tutte le figure costituenti il gruppo stesso è* $S = \pi - H$, *per essere* π *area del circolo.*

222. 1. **Se il polig. reg. iniziale iscritto è pari di lati e di area A, la determinazione del valore della somma s delle aree delle figure costituenti il gruppo può avanzarsi fino al valore A.**

2. **Se il numero degli n lati dei polig. regol. iniziale iscritto è dispari, e sia A' l'area del poligono di $2n$ lati, la somma s delle aree delle figure formanti il gruppo può avanzarsi fino al valore A'.**

Infatti (Fig. 63ª B). Sia pari di lati il pol. reg. iniziale. Con la metà dell'arco *abd* sotteso ad ipotesi dal lato *ad* del quadrato iscritto, si costruisca la corona $\wedge$ s, nonchè il quadrato *mnop*. Per essere arco $bd=de=ef$, anche ang. $bad=dae=eaf$... perciò triang. mistilineo $ap'mr=\frac{adb}{2}$ semisegmento circolare, ma triang. mistilineo $ap'mr=ap'nr$, e però triang. mistilineo $mrar'n=adb$ segmento circolare. Sostituendo le aree dei quattro segmenti circolari determinati dai lati del quadrato iscritto a quelle dei triangoli mistilinei formanti la corona H, risulta $s+\overline{mn}^2=\overline{ad}^2$ polig. regol. iniziale pari di lati; ciò dimostrasi anche per qualunque altro polig. regolare iniziale pari di lati.

2. Sia dispari di lati il poligono reg. iniziale dato (Fig. 63ª A). Con la metà dell'arco *abd* sotteso dal lato, che sia ad ipotesi *ad* del triangolo equilatero iscritto, si costruisca la corona $\wedge$ di area *h*; s' iscriva l' esagono regolare di area A', e si traccino i raggi *ca*, *cb*, *cg*. Il quadrilatero *abcg* è una losanga, per essere lato *ab* dell'esagono regolare iscritto uguale al raggio, e però arco e corda $bma=bm'c$, ossia segmento circolare $bam=bcm'$; sostituendo il primo al secondo e ciò ripetendo per i sei segmenti circolari uguali a quello *bam* formanti le tre figure lenticolari come *bm'cr*, trovasi l'area della corona $\wedge$ $h=$A' area del poligono di un doppio numero di lati di quello dispari iniziale. Dimostrasi in ugual modo per qualunque altro poligono regolare iniziale dispari di lati che sia assunto come base di un gruppo di poligoni circolari, o corone circolari.

223. Le proprietà speciali ai poligoni circolari si utilizzano in pratica segnatamente nella misurazione di una quantità di figure simmetriche, di anelli cilindrici aventi per base poligoni circolari o anelli di figure isosceliche.

CAPITOLO III.

Figure listate

224. Diremo *liste* o *listate* le figure isosceliche della spece che ora descriveremo.

Per brevità useremo talvolta il segno Λl per indicare le liste o listate.

225. (Fig. 64ª A, B) Una linea di qualsiasi forma *a bcd* (A), ovvero *m n o p* (B), la quale non abbia punti d' intreccio, sia giacente sul piano, e lo percorra secondo un' altra linea qualunque purchè non abbia punti d' intreccio come *dd', dd'd'', dd'd''d'''* (A), ovvero *m m' m'' m'''* (B), la parte del piano coperta dalla prima nel suo percorso diciamo *lista*, e *figura listata* diremo la parte limitata di una lista.

Le figure dalla 64ª alla 68ª sono listate.

a) Le figure Λl si distinguono in *semplici* e *ripiegate.*

Le listate semplici sono generate da una linea *abcd* (Fig. 68ª A) la quale rapporto ad uno dei suoi estremi *a.d* non ha punti rientranti. Le listate ripiegate sono generate da una linea *mnop* (Fig. 64ª B) la quale rapporto ad uno dei suoi estremi *p.m* ha dei punti *n, o* rientranti o salienti.

b) *Le listate semplici* (Fig. 64ª A alla 67ª) *sono in sostanza quadrilateri isoscelici, e di conseguenza nè pos-*

siedono tutti i caratteri e proprietà. Le liste ripiegate si formano di più liste semplici combinate per somma o differenza.

c) Le quattro linee parallele ed opposte due a due costituenti il perimetro di una listata semplice sono i suoi lati, di questi uno si suppone semovente sul piano e si chiama *generatrice* della lista, e l'altro *direttrice*. Nelle *liste ripiegate* diconsi lati tutti quelli delle liste semplici che le formano.

d) **Nelle Λ*l* semplici o ripiegate qualunque lato può assumersi come generatrice rapporto all'altro lato considerato come direttrice,** inquantochè (Fig. 64ª A) delle due linee *abcd*, *d d' d" d"'* può supporsi che per un suo estremo *d* la prima percorra parallelamente a sè stessa tutti i punti della seconda formando la Λ*l*. *abdd'd"'a"'*, ovvero che la seconda per un suo estremo *d* percorra ugualmente tutti i punti della prima formando la stessa Λ*l*.

e) Di ciascun lato Λ della lista si dice *corda* la retta che congiunge i suoi estremi. Nella Λ*l* semplice le corde dei suoi quattro lati Λ ne costituiscono *il quadrilatero delle corde.*

f) **Il quadrilatero delle corde di una Λ*l* è sempre un parallelogramma,** nè può essere un romboide. Nelle Λ*l* ripiegate, come i lati, anche i rispettivi quadrilateri delle corde sono ripiegati ossia in parte si sovrappongono.

g) *L'altezza di una listata semplice* (Fig. 65ª) *è la perpendicolare* ah *ovvero* ak *o anche* eh' *ovvero* bk' *abbassata da un lato del suo quadrilatero delle corde al lato opposto. In una* Λ*l ripiegata* (Fig. 68ª A) *si assume come altezza la perpendicolare* a'h *ovvero* d'k, *abbassata dall'una all'altra corda dei suoi lati estremi.*

226. **L'area di una $\wedge l$ semplice è uguale a quella del rettangolo equivalente al suo quadrilatero delle corde.**

(Fig. 65ª) Infatti, per essere la listata *amepdnbo* quadrilatero $\wedge$, la sua area A è equivalente a quella del suo quadrilatero delle corde *aedb*, ma l'area di questo è uguale a quella di uno dei rettangoli $ab \times ak$ ovvero $ae \times ah$ della stessa sua base ed altezza, quindi area della listata $amepdnbo = A = ab \times ak = ae \times ah$.

Consegue che: **Più liste semplici sono equivalenti se hanno una corda uguale e la stessa altezza riferita a questa corda.** (Fig. 66ª) Le $\wedge$ A, B, C nelle quali corda $ab = a'b' = a''b''$, ed altezza $dh = d'h' = d''h''$ sono equivalenti, e la loro misura è $ab \times dh$.

227. (Fig. 67ª) Sui lati di una $\wedge l$ diciamo *omologhi* i punti d'intersezione con essi di una retta iq' parallela ad una delle sue corde *ae*, e *biomologhi* quelli omologhi s', z' di due linee $ss'x$, $zz'y$ uguali e parallele tra loro ed alla generatrice $ee'a$ della listata che trovansi dentro l'area di questa.

228. **Qualunque punto** s' (Fig. 67ª) **dell'area di una $\wedge l$ semplice, è biomologo rispetto a due punti** e', s **di due lati $\wedge$ consecutivi della listata.**

Infatti, per il punto s' si può sempre far passare una linea $ss'x$ uguale e parallela alla generatrice $ee'a$ della $\wedge l$, la quale con un suo estremo s sia sopra uno dei lati consecutivi alla generatrice; preso sulla generatrice un punto e' omologo di quello dato s', si tracci la $e's'$, e su questa come corda si costruisca la $eo''s'$ parallela ed uguale al segmento $eo's$ del lato $\wedge$. Ne resta evidentemente formato il quadrilatero $\wedge$ $ee's's$ nel quale s' è nel tempo stesso agli estremi di due linee ss', $e'o''s'$

uguali e parallele ai segmenti *ee'*, *eo's*, della generatrice e del lato consecutivo; ossia *s'* è biomologo rapporto ai punti *e'*, *s* di due lati consecutivi della Λl. Si dimostra in ugual modo che il punto *s'* è biomologo con le coppie dei punti *s.s''*, *s''.x*, *x.e'* dei lati della Λl.

229. 1. **Una Λl semplice può dividersi in parti di aree uguali o in un richiesto rapporto.**

2. **La stessa Λl può decomporsi in un numero arbitriario di quadrilateri Λ e perciò quadrabili.**

Infatti: 1. (Fig. 67ª) Il quadrilatero *abde* delle corde di una listata M abbia ugual base ed altezza del rettantangolo *pfkh''*. Si dividano le loro basi uguali $pf = ab$ nelle parti uguali o proporzionali volute che siano ad ipotesi $pm = at$, $mn = ti$, $nf = ib$; nei punti *m*, *n* si elevino le perpendicolari ed in quelli *t*, *i* si traccino le parallele al lato *ae* del quadrilatero delle corde, le quali taglino i lati Λ della Λl nei punti *x*,*s* » *y*,*z* e su questi segmenti come corde si segnino le *ss'x*, *zz'y* uguali e parallele alla generatrice *ee'a* della Λl; questa resterà così divisa nelle Λl. M, P, Q di aree nel voluto rapporto.

Poichè per il più volte dimostrato abbiamo

$M = aea't = pm \times pk$, $P = ta'e'i = mn \times pk$, $Q = ie''db = nf \times pk$ e però

$M : P : Q :: pm \times pk : mn \times pk : nf \times pk :: pm : mn : nf$.

2. Presi dentro l'area della Λl quanti vogliansi punti biomologhi *s'*, *z'*, ... , come al precedente si costruiscano i quadrilateri Λ *ess'e'*, *sxz's'* i quali sono quadrabili, e però non solo la Λl resta così decomposta nella quantità di parti volute, ma togliendo dalla figura ad arbitrio una, due, *n* di queste parti, la Λl si cangia in altre figure di contorno irregolare e di area quadrabile. Inoltre se dalla Λl si toglie ad ipotesi il quadrilatero Λ *szz's'* e si colloca

al di fuori dell'area di essa in modo che il lato *sz* del quadrilatero coincida col segmento uguale *xy* del lato della lista, e ciò si ripeta per altri quadrilateri tolti in ugual modo all' interno della lista e poi aggiunti all' esterno di essa, si formeranno altrettante figure irregolari di area equivalente a quella della $\wedge l$.

230. Due liste si dicono *parallele*, *perpendicolari*, *oblique* secondo che tali siano fra loro le corde dei loro lati $\wedge$.

Angoli listati

231. *Due liste che hanno la generitrice rettilinea, uguale e coincidente, ovvero delle quali la generitrice dell'una forma coppia isoscelica con quella dell'altra incontrandosi per un estremo, formano un angolo che diremo listato* (ang. $\wedge l$) (Fig. 69ª A, B, C, D, E, F) sono angoli $\wedge l$.

a) Se le due liste di generatrice come è detto sono poi fra loro uguali, l'angolo che formano è *listato isoscelico* (Fig. 69ª A).

b) Quando le generatrici delle due liste che s'incontrano per un estremo formano coppia isoscelica, *l'angolo listato è smussato* (Fig. 69ª B).

c) *Se i lati delle liste formanti l'angolo sono archi di curve geometriche, questo si nomina da quelle curve* (Fig. 69ª C, D, E).

d) L'angolo listato è *retto, acuto, ottuso, piatto, concavo, converso* . . . . Secondochè tale è quello che formano le corde dei suoi lati listati.

232. In genere *la misura degli angoli listati è limitata a quelle delle aree delle liste che li formano, inquantochè i soli angoli listati dei quali possa misurarsi esattamente l'apertura dei lati* ∧*l, sono quelli formati da coppie di liste uguali e delle quali la generatrice è rettilinea, uguale e coincidente, o dei quali le generatrici formano coppia* ∧.

(Fig. 69ª A) Per questa limitazione gli angoli listati hanno un' importanza secondaria, sebbene taluni di essi, segnatamente quelli costituiti da liste formate da archi di curve geometriche, abbiano delle notevoli proprietà. Ne fu dato un esempio al (173) ove si rilevarono alcune proprietà dell'ang. ∧*l* circolare (Fig. 69ª c). Tali speciali proprietà degli ang. ∧*l* non ci è concesso di qui svolgere in dettaglio.

233. *Ad un angolo listato si attribuisce per misura quella dell'angolo rettilineo delle corde dei lati isoscelici o no, purchè esterni delle liste che formano l'ang.* ∧*l*, sebbene ciò sia rigorosamente esatto solo per l'angolo *listato isoscelico* come sopra è detto. Avremo cioè (Fig. 69ªA) ang. ∧*l* ∧ = arco *dpf*. Diremo poi misura dell'ang. ∧*l* (Fig. 69ª F) arco *apb*: nell'angolo circolare (Fig. 69ª c) di vertice *a*, diremo misura l'angolo piatto formato dalle generatrici *ag*, *ag'*, ossia ang. ∧*l a* al vertice=180° = 2*r*; dell'angolo ottuso formato dalle liste circolari limitate dai punti *b*, *e* l'arco *bme*; supposto retto l'ang. *fad*, diremo retto l'angolo formato dalle liste circolari limitate in *f*, *d*: così arco *hzi* misura dell'angolo acuto formato dalle liste circolari limitate in *h*, *i*, e finalmente la misura dell'angolo chiuso (c) formato dalle liste circolari che tornano ad incontrarsi in *k*, sarà 360° circonferenza descritta col lato dell'angolo ripiegato *kak*.

Poligoni radiati

234. Sia dato un poligono isoscelico regolare o nò (Fig. 70ª A, B).

Con i suoi *n* lati come generatrici, e secondo direttrici arbitrarie si costruiscano altrettante liste, ne resterà formata una figura come C, D, E, F, G, H, I ovvero B, R, L, M, N, O che diremo *poligono radiato*, il suo poligono centrale C ovvero B diciamo *nodo del radiato*, e *raggi listati* le liste generate dai lati del poligono Λ centrale o nodo.

235. Il poligono radiato si distingue in *regolare ed irregolare; esso è regolare se il suo nodo è poligono isoscelico regolare di qualsiasi forma di lati* Λ, *e che i suoi lati listati abbiano la stessa altezza riferita in ciascuno alla corda del rispettivo lato* Λ *del poligono generatore.*

236. **I poligoni radiati sono quadrabili**: componendosi essi di poligoni Λ e di liste Λ che sono quadrabili.

237. **Può decomporsi un poligono radiato in parti uguali o in un voluto rapporto**; potendosi così decomporre i poligoni Λ e le liste delle quali si forma, come si dimostrò.

238. *Dato un gruppo di poligoni isoscelici, ciascun poligono* Λ *del gruppo può assumersi come nodo di un poligono radiato; ne resta così formato un* **gruppo radiato** *del quale è* **poligono rettilineo fondamentale** *quello stesso del gruppo isoscelico del suo nodo.*

239. *Quando con gli* n *poligoni isoscelici di un gruppo* $\wedge$ *si formano* n *diversi gruppi isoscelici e da questi* n *radiati, l' insieme dei gruppi radiati costituisce un fascio.*

240. *In un fascio radiato, se più liste radianti generate da diversi lati* $\wedge$ *aventi la stessa corda, hanno uguale altezza riferita a questa corda le loro aree sono equivalenti.*

241. (Fig. 70ª B) Può dividersi in *n* segmenti *po*, *oq* un lato isoscelico *pq* del poligono nodo di quello radiato, e sopra ciascun segmento, come generatrice può costruirsi una o più liste di direttrici arbitrarie. Se a ciascuna di queste liste parziali si dà la stessa altezza del raggio listato del quale sono parte, *la somma delle aree delle liste parziali è uguale a quella del raggio listato.* Avremo cioè liste $s'+s''+s+s'''=\wedge l$ *poqeid.*

242. (Fig. 70ª A, B) Con le rette *ab*, *ed*, *ef* .... si congiungano due a due gli estremi *a*, *b* » *c*, *d* » *e*, *f*. ... dei lati $\wedge$ più lontani dal centro delle liste radianti; ne resta formato il poligono mistilineo *abkgfe* .... (A), ovvero *ab'o'cd'te'* .... (B), l'area del quale diremo *campo radiato* od anche *campo del poligono radiato.*

Le congiungenti *ab*, *cd*, *ef* .... possono essere due a due linee costituenti coppia isoscelica, allora il *campo radiato è isoscelico.*

Il campo radiato è regolare o no secondochè tale sia il poligono radiato che contiene.

243. **Il campo radiato è quadrabile**, per essere area di poligono parte rettilineo e parte isoscelico ovvero di poligono isoscelico.

244. **La parte dell'area del campo radiato non coperta dal poligono radiato che contiene è quadrabile**, poichè essa è differenza tra le aree del primo e del secondo poligono che sono quadrabili.

245. Se un campo radiato è regolare, ossia tale è il poligono radiato che contiene, possono evidentemente formarsene le serie duennesime ascendente e discendente.

246. Da quanto si è accennato sui poligoni radiati si vede che essi trovano estesa applicazione nelle arti e nella misurazione.

247. **L'area di una lista ripiegata è quadrabile solo quando essa possa decomporsi in più liste semplici delle quali sia somma.**

Infatti (Fig. 68ª A) sia *abcmed* generatrice ed *aa'* direttrice della lista ripiegata *abmedd'm'c'o'a'*. Prolungata la *c'c* in *o*, e la *bm* in *m'*, l'area della lista resta decomposta nel quadril. *aoo'a'* e quadril. mist. *ocnmb*, più liste *enmm'nc'* e *medd'e'm'*, figure tutte quadrabili escluso il quadrilatero mistilineo *ocnmb*. Chiamando A l'area della lista ripiegata, poichè segmento circolare o no *cmn=c'm'n'*; avremo A = *aoo'a'*+*obm'c'*+*mdd'm'*+*cm'n'*; ma questa ultima figura non isoscelica non è quadrabile e però non lo è neppure l'area A,

Sia invece generatrice della *l*Λ ripiegata la *afon''bcnmed*, nella quale per ipotesi sia arco *on''b* =

$= cnm = c'n'm'$. Allora l'area A della ripiegata è quadrabile; poichè prolungata la $c'c$ in o e la bm in m', la lA ripiegata risulta composta della somma delle liste semplici $afoo'f'a' + on''bm'n'c' + medd'e'm'$, le quali sono equivalenti ai rispettivi quadrilateri delle corde, ed avremo $A = aoo'a' + obm'c' + mdd'm'$.

248. **L'area A' di una lista ripiegata che abbia generatrice e direttrice curvilinee, è quadrabile nel solo caso che le parti sovrapposte delle liste semplici costituenti la ripiegata siano figure isosceliche ossia quadrabili.**

Infatti (Fig. 68ª B) sia *arbcod* generatrice ed *aef* direttrice ambedue curvilinee, della ripiegata *arbodhgmf*, che si forma delle liste semplici $arbonmf + cmghs'''do$ le quali si sovrappongono del quadrilatero curvilineo $cos''nz'ms'$. Si verifichi che arco $co = fm$ e che tracciata la oe parallela alla nf risulti a questa uguale, fatto allora arco cze uguale ed inverso a quello $mz'n$, ne resta formata la lista semplice $ecos''nmfs$ costituita dai due quadrilateri fra loro uguali $eos''nz'ms' = mfsezes'$ che di conseguenza sono quadrabili, e però sostituendo alle liste semplici formanti la ripiegata i rispettivi quadrilateri delle corde avremo

$$A' = \frac{aboe + eonf + cdhg}{2}$$

249. Fra le descritte figure quadrabili si dicono anche *semplici* o regolari le lunole d'ipocrate, le isosceliche e le listate semplici.

Composte si chiamano quelle che si formano di due o più figure semplici della stessa spece combinate per somma o differenza. Così i *poligoni radiati* sono figure composte.

Miste si dicono le figure formate con le combina-

zioni per somma o differenza di due o più figure semplici di diversa spece. I *triangoli isoipocratici* sòno figure miste.

Fra le figure composte e miste si distinguono le *annulari* quali le corone di lunole ipocratiche o di figure isosceliche, o le zone annulari formate dalla differenza tra le aree di figure quadrabili della stessa o di diversa spece.

250. Le figure composte e miste godono in genere le stesse proprietà delle figure semplici delle quali si formano, e perciò danno luogo ad infinite combinazioni geometriche assai utili in pratica, ma che per lo spazio ristretto non possiamo descrivere.

Figure spezzate o frammentarie

251. *Diconsi spezzate o frammentarie tutte le figure delle quali il valore dell'area è parte esatta di quella di una figura semplice quadrabile.*

Vedemmo che le figure quadrabili possono in genere decomporsi in figure delle quali l'area sia una loro parte esatta; una qualunque di tali figure parziali è frammentaria di quella da cui proviene.

a) Togliendo da una figura quadrabile una sua frammentaria la residuale è pure figura frammentaria della prima, lo stesso si verifica quando si tolgono n frammentarie da una figura f; ossia $f—n$ è pure figura frammentaria.

b) Le due parti $n, f—n$ nelle quali si è decomposta una figura f, si dicono *completanti* l'una dell'altra

c) Le frammentarie si suddividono in *semisosceliche*, *perforate* ed *irregolari*. *Sono semisosceliche le*

figure delle quali ciascun lato curvilineo o mistilineo si può dividere in segmenti due a due uguali e capaci di costituire coppia isoscelica.

252. **Le figure semisosceliche sono direttamente quadrabili.**

Infatti (Fig. 71ª A) i lati curvilinei o mistilinei, *coa*, *co'b* del triang. mistilineo *asco'b* siano divisi per metà nei punti *o*, *o'* in parti uguali di forma ed isoscelicamente disposte, tracciate le corde *oc*, *oa*, *o'c*, *o'b* risultano due a due uguali e per dritto, e formeranno coi lati del triangolo mistilineo le figure tra loro uguali $n=n'$, $n''=n'''$. Si collochino le fig. *n*, *n''* nel posto delle loro uguali *n'*, *n'''*, ed il triangolo mistilineo si trasforma nel rettilineo *acb* al quale e perciò equivalente.

Nel triangolo mistilineo (B) *a'oc'o'''b'* del quale i lati si compongono di coppie di segmenti due a due uguali e suscettibili di essere ciascuno decomposto in coppia isoscelica mediante i punti *o*, *o'*, *o''* . . . . , tracciate come sopra le corde di ciascuna coppia, queste sono per dritto e con la loro somma formano i lati *c'a'*, *c'b'* del triang. rettilineo *a'c'b'* il quale, operando come sopra, si trova eguivalente a quello mistilineo.

Nel triangolo mistilineo (c) se i tre lati sono suscettibili di essere divisi isoscelicamente in *s*, *s'*, *s''*, ponendo le figure esterne *o* nel luogo delle interne e rispettivamente uguali *o'*, trovasi che il triang. mistilineo è equivalente al rettilineo *a''c''b''*.

In ugual modo si dimostrerebbe per qualunque poligono semisoscelico diverso dal triangolo.

253. **Le frammentarie semisosceliche sono completanti di sè stesse.**

Infatti (Fig. 71ª B) si completi il parallelogramma $a'b'd'c'$, e sul lato $b'd' = a'c'$ si costruisca il lato curvilineo $b'rr'd' = a'o'oc'$; risulta triang. mistilineo B = B' e l'intera figura lista semplice. Ugualmente (Fig. 71ª C) si completi il parallelogramma $a''c''b''d''$; si costruisca lato curvilineo $d''nb'' = a''sc''$, e $a''md'' = b''s'c''$ sia direttamente che inversamente disposti, e l'intera figura risulta isoscelica.

254. *Le semisosceliche sono apparentemente dispari di lati,* inquantochè ogni lato apparente della figura si costituisce di una coppia o più coppie isosceliche. Così (Fig. 71ª A) il triangolo apparente Λ *aoco'b* è un esagono del quale i lati rettilinei $pa = pb$ sono per dritto. Il triangolo apparente $a'o'oc'o'''b'$ (B) è un decagono del quale due lati rettilinei $p'a' = p'b'$ sono per dritto ecc.

255. **Le semisosceliche hanno le stesse proprietà delle isosceliche.**

Infatti: 1. *Dato un poligono rettilineo come fondamentale si può formare un gruppo di figure semisosceliche fra loro equivalenti,* inquantochè (Fig. 71ª A) per i punti medi dei lati del polig. fondamentale si possono far passare quante vogliansi linee di diversa forma che siano tagliate da quei punti in coppie isosceliche, di ciascuna delle quali il rispettivo lato del poligono fondamentale è somma delle corde.

2. *Le figure dello stesso gruppo semisoscelico sono tra loro equivalenti, e fra due o più figure del gruppo possono scambiasi* n *coppie di lati, formandone altre figure appartenenti al gruppo stesso* (189, 5°).

3. *Due o più gruppi semisoscelici che hanno equiva-*

lente il poligono fondamentale, sono equivalenti; e le figure di un gruppo possono sostituirsi a quelle dell'altro (190).

4. *Una semisoscelica può decomporsi in quante vogliansi figure delle quali l'area sia in assegnato rapporto con quella della semisoscelica o tra loro.*

5 *Data una semisoscelica può formarsi un poligono radiato semisoscelico del quale la figura data è nodo. Il poligono semi∧ gode di tutte le proprietà dell' isoscelico.*

6. *Dato un gruppo semisoscelico può formarsi un fascio radiato semisoscelico che ha lo stesso poligono fondamentale del gruppo generatore. Il fascio radiato semi∧ gode le stesse proprietà di quello ∧ ecc.*

256. Dall'area di una figura quadrabile f di qualsiasi forma si tolgano quante vogliansi altre figure quadrabili o no, tali però che un segmento del rispettivo perimetro di ciascuna sia uguale ad un segmento del perimetro della data figura f, per modo, che collocando le figure parziali all'esterno dell'area della prima possano coincidere per il segmento uguale. Ciò effettuato, ne resta formata una seconda figura equivalente alla prima che diremo *perforata*.

Così dall'area di un poligono regolare di n lati, togliendo n triangoli che abbiano un lato uguale a quello del poligono e facendoli coincidere per questo lato uguale all'esterno di questo (Fig. 72ª A, B), ne resta formata una perforata dentata (rota dentata).

L'area B. del poligono di n lati (Fig. 72ª C) iscritto nel circolo di raggio r, sia perforata da un poligono stellato M. Se un secondo circolo B' dello stesso raggio r si perfora al centro con un poligono M' = M, e con gli n

segmenti circolari *abo* del primo si formano $\frac{n}{2}$ figure perforate lenticolari radianti dallo stellato del secondo, l'area del circolo perforato B' risulta uguale a quella del poligono perforato B, e però quadrabile ecc.

257. *Data una figura iniziale possono costruirsi infinite perforate di area ad essa equivalente e perciò equivalenti tra loro.*

a) Più perforate equivalenti ad una stessa figura costituiscono un *gruppo perforato* del quale quella figura è fondamentale.

b) *Data una figura iniziale perforata può costruirsi sui suoi lati un poligono radiato perforato, del quale la figura iniziale è il nodo.*

c) *Date più perforate dello stesso gruppo, e sui loro perimetri, costruite altrettante liste che ne abbiano per base dei segmenti, ne resta formato un fascio radiato perforato del quale è fondamentale la stessa figura iniziale del gruppo* ecc. ecc.

d) Le perforate trovano in pratica utile ed estesa applicazione.

258. In genere, come vedemmo, le figure quadrabili di qualsiasi forma sono decomponibili in figure delle quali le aree siano fra loro, o riferite alla figura iniziale, in un assegnato rapporto. Se tali figure parziali non appartengono ad una delle classi sopra descritte si dicono *frammentarie irregolari.*

La varietà di forma delle frammentarie irregolari non ha limite, e però data una di tali figure, non sempre riesce facile verificare se essa sia quadrabile; i modi di verifica variano anche essi per figure di diversa forma,

e non permettendoci lo spazio limitato di classificarli ed esporli ordinatamente, ci limitiamo a dare i seguenti esempi prattici.

1. (Fig. 73ª A) Sia data la figura irregolare mistilinea A.

Si verifichi che i segmenti curvilinei *bma*, *b'm'a'* del suo perimetro sono fra loro uguali ed isoscelicamente disposti, e che il segmento curvilineo *aos* può essere diviso dal punto *o* in coppia isoscelica. Si traccino le corde *ab*, *ba'*, *as*. Per l'uguaglianza delle figure $r = r'$ e $n = n'$ ponendo r, n nel posto delle loro uguali, la figura A si trasforma nel triangolo rettilineo *abs* ad essa equivalente.

2. Sia data la figura curvilinea irregolare (Fig. 73ª B). Si verifichi che i suoi segmenti *hop*, *hzm* si possano dividere in *o*, *z* in coppie $\wedge$. Si traccino le corde *poh*, *pm*, *mh* e le *hg*, *pg* parallele ed uguali alle *mp*, *mh*; sulla corda *hg*, si costruisca segmento curvilineo $hq'g = mqp$ e si faccia $gz'p = mzh$, in modo che siano isoscelicamente disposte, resta così formata una seconda figura irregolare $B' = B$: ma quadrilatero $\wedge$ $mzhq'gz'pq = B + B' = mhgp$ e però figura $B = \frac{mhgp}{2}$.

3. (Fig. 73ª c) Sia dato il pentagono irregolare P formato da archi di ugual raggio. Si determinino i centri e, e_1, e_2, e_3, e_4, dei suoi lati circolari. Si prolunghi l'arco *alb* che passi per ipotesi dal vertice *e*. Si traccino le corde *ea*, *eb*, e ad esse ad incontrare l'arco *abe*, si abbassino le perpendicolari *fh*, *do*. Si verifichi che $hf = hm$ ed $od = on$; nè dedurremo che i triangoli circolari *abefp*, *bmezd* sono sferici e di conseguenza l'area del pentagono irregolare loro differenza, sarà $P = abefp - bmezd = amef - bned$.

259. Come si è visto nelle figure quadrabili regolari o nò, i lati curvilinei o mistilinei, siano o no isoscelici, sono però sempre isoscelicamente disposti, ossia due a due piegati nello stesso senso ; se il contorno di una figura si forma di segmenti curvilinei o mistilinei piegati due a due in senso contrario, la sua area ordinariamente non è quadrabile. Così il circolo, ed in genere le altre coniche sono quadrabili solo con approssimazione. Fanno eccezione i quadrilateri ⋀ che hanno il rombo come quadrilatero delle corde, i quali sono quadrabili anche quando i loro lati opposti siano curvati in senso contrario, come (Fig. 74ª A, B, C).

260. *In genere qualunque figura quadrabile può ridursi non quadrabile sommando o sottraendo da essa una o più figure non quadrabili.*

Qualunque figura non quadrabile può ridursi quadrabile sommando con essa una o più figure non quadrabili. Ad esempio: iscrivendo il circolo nel quadrato, l'intera figura è quadrabile, ma tanto il circolo quanto i quattro triangoli mistilinei, che sommati con esso formano il quadrato, non sono figure quadrabili.

261. Si vede dal sopra esposto che tra le figure di contorno curvilineo e mistilineo quelle di area quadrabile sono assai più numerose delle non quadrabili, e perciò nella maggior parte dei casi si possono misurare figure piane e solide con metodi elementari, senza ricorrere al calcolo ed alla formula di Simpsons come ora si usa.

CAPITOLO IV.

Sulla formazione delle figure piane curvilinee

262. *Nel significato teorico un punto geometrico* p *non ha dimensioni. La linea geometrica* l *è una lunghezza senza larghezza e profondità.*

Così la linea di mira di un canocchiale è linea geometrica.

Due linee di mira situate nello stesso piano e non parallele si tagliano in un punto che è punto geometrico.

Pertanto, se possiamo concepire enti immateriali, non sappiamo nè rappresentarli con segni pure immateriali, nè esprimerne il valore in modo concreto.

Nel significato grafico un punto p' è un piccolo segno che sta ad indicare un punto geometrico, e la linea grafica l' è una traccia visibile che rappresenta una linea geometrica, ma l'uno e l'altra per essere visibili, devono avere dimensioni.

La stessa geometria definisce la linea grafica come formata da una serie di punti piccolissimi che si succedono toccandosi. Tali punti non possono essere geometrici, poichè essendo il punto geometrico $p = 0$ non può generare dimensioni trovandosi $np = 0$; e perciò al punto grafico p' dobbiamo attribuire dimensioni, affinchè possa assumersi come elemento generatore di figure geometriche.

Ma se il punto grafico p' ha dimensioni, possiamo anche attribuirgli una determinata forma o figura che abbia almeno due dimensioni e cioè lunghezza e larghezza, che racchiuda un' area infinitamente piccola, possa giacere in-

tera sul piano e sia tale che riprodotta *n* volte, le *n* figure uguali possano coincidere per un lato uguale nei due sensi ed in modo da coprire una parte del piano senza interruzioni; e però tale ipotetica figura dovrà essere *un parallelogramma qualunque.*

(Fig. 75ª A, B, D) Suppongasi la retta *ab* (A) come formata di quadrati *m*, *m'*, *m"* . . . . piccolissimi tra loro uguali, successivi e concidenti per un lato; la retta *cd* costituita di parallelogrammi *n*, *n'*, *n"* . . . . piccolissimi fra loro uguali, successivi è coincidenti per un lato scambievolmente uguale; la linea *efg* formata da parallelogrammi *o*, *o'*, *o"*, di ugual base ed altezza e di diversi angoli, disposti successivamente e coincidenti per la base scambievolmente uguale, ed allora le linee *ab*, *cd*, *cfg* divengono altrettante liste geometriche (225) di generatrice *ph* piccolissima, e come tali possono validamente assumersi quali fattori geometrici nella generazione delle aree d'infinite figure.

Nella fatta ipotesi si vede che la curva *efg* è in realtà una spezzata costituita di lati successivi tanto piccoli da darle l'apparenza di continuità, ossia apparenza curvilinea.

Ci baseremo sulla sopraesposta formazione ipotetica delle linee grafiche per dedurne la ragione della formazione delle figure geometriche.

263. Le linee di qualsiasi forma possono considerarsi ciascuna in sè stessa, o l'una paragonarsi con l'altra in referenza alla rispettiva lunghezza ed allora esse appartengono al *primo stato geometrico* (160), ovvero due o più linee possono considerarsi quali elementi concorrenti alla formazione di una figura ed allora esse, come liste, appartengono al *secondo stato geometrico.*

264. Le linee di qualunque forma, come figure del primo stato geometrico, hanno per misura l'unità rettilinea, alla quale può assegnarsi una lunghezza arbitraria.

Consegue in genere che la lunghezza o rettificazione di una curva è data dalla somma delle corde di suoi archi successivi e piccolissimi nei quali siasi arbitrariamente divisa, purchè tali corde possano senza errore sensibile ritenersi ciascuna come rettificazione del rispettivo arco.

Lo studio della rettificazione e misura delle curve appartiene alla geometria superiore, qui accenneremo solo alla rettificazione della circonferenza e delle policentriche.

265. Per rettificare la circonferenza potremo considerarla come poligono regolare iscritto di un numero n di lati tale che la corda dell'arco $\frac{360^\circ}{n}$ possa ritenersi senza sensibile errore quale rettificazione dell'arco stesso.

Come al (103) siasi trovato il valore della corda dell'arco $\frac{60^\circ}{2^{15}} = 0{,}000031957930029$; poichè

$\frac{60^\circ}{2^{15}} = \frac{60^\circ}{32768}$, e per essere $60^\circ \times 6 = 360^\circ$, sarà

$6 \times \frac{60^\circ}{2^{15}} = \frac{360^\circ}{196608} = 0{,}000031957930029$; e però in parti di raggio uno, avremo circonferenza

$c = 0{,}000031957930029 \times 6 \times 32768 = 6{,}283184707141632....$

Dividendo per 2 avremo ancora $\pi = 3{,}141592353570816....$

266. Nella rettificazione della policentrica possono darsi due casi: 1. gli archi formanti per somma la policentrica sono tutti costruibili, 2. gli stessi archi sono non costruibili.

I due casi comprendono quello in cui detti archi sono in parte costruibili ed in parte no.

1. (Fig. 76ª) Nella policentrica *abde* . . . . di centri *c*, *c'*, *c''* sia raggio $ca = 1$. Nel circolo *c* sia arco $ab = \frac{360°}{10}$, nel circolo *c'* arco $bd = \frac{360°}{12}$, nel circolo *c''* arco $de = \frac{360°}{24}$, e però gli archi *ab*, *bd*, *de* . . . . sono costruibili. Trovato come al precedente $\frac{360°}{196608} = 0{,}000031957930029$; e tenuto calcolo dei diversi raggi *ca*, *c'b*, *c''d*, avremo

$$\text{arco } ab = \frac{360°}{10} = \frac{196608}{10} = 19660{,}8 \times 0{,}000031957930029$$

$$\text{arco } bd = \frac{360°}{12} = \frac{196608}{12} = 16384 \times 0{,}000031957930029 \times c'b$$

$$\text{arco } de = \frac{360°}{24} = \frac{196608}{24} = 8192 \times 0{,}000031957930029 \times c''d$$

e sommati i tre prodotti, si avrà la rettificazione approssimata dell'arco *abde* della curva.

2. Gli archi *ab*, *bd*, *de* non siano costruibili; allora si dovrebbe dividere ciascuno di essi, ad ipotesi *ab*, in numero arbitrario *n* di archi uguali piccolissimi; si dovrebbe raccogliere sul raggio la proiezione *h* dell'arco $\frac{1}{n}$ che ha l'estremo comune col raggio stesso, e quindi determinata in parti di raggio 1 la lunghezza della doppia proiezione $2.h$, la rettificazione dell'arco sarebbe $ab = n \times \sqrt{2.h}$. Ugualmente per gli archi successivi, tenendo calcolo dei diversi raggi, si avrebbe arco $bd = n' \times \sqrt{2.h'} \times c'b$, e $de = n'' \times \sqrt{2.h''} \times c''d$, talchè arco della policentrica

$$abde = n \times \sqrt{2.h} + n' \times \sqrt{2.h'} \times c'b + n'' \times \sqrt{2.h''} \times c''d:$$

ma la difficoltà di determinare con esattezza il rapporto al raggio della doppia proiezione piccolissima $2.h$ può indurre in errore, ed in pratica riesce più semplice e conveniente sostituire agli archi non costruibili altri costruibili che diversifichino dai primi di quantità trascurabile, per quindi operare come nel primo caso. Ad esempio, si trovi arco $ab = 35°.97$ » $c'b = 30°,02$ » $c'd = 15°,033$, sostituiremo ordinatamente ad essi gli archi costruibili $36° = \frac{360°}{10}$ » $30° = \frac{360°}{12}$ » $15° = \frac{360°}{24}$, ed operato come al primo caso, otterremo con sufficente approssimazione la rettificazione della curva *abde*.

267. Tutte le operazioni geometriche che possono effettuarsi fra le linee del primo stato, ossia considerate nella loro lunghezza indipendentemente alla scambievole inclinazione e posizione sul piano, appartengono pure al primo stato geometrico; esse sono moltissime ed importanti, ma qui non le annoveriamo.

268. *Alle linee considerate nel secondo stato geometrico, ossia come elementi capaci di generare aree e superfici, attribuiamo la natura e forma di liste geometriche semplici aventi la stessa generatrice rettilinea piccolissima, e però come liste, il loro valore relativo è indipendente dalla rispettiva lunghezza e forma ma ordinariamente subordinato alla loro scambievole posizione ed inclinazione sul piano.*

Così (Fig. 75ª A, B, D) le liste semplici A, B, D rappresentino le linee *ab*, *cd*, *efg* costituite di punti grafici *m*, *n*, *o* aventi forma di parallelogrammi successivamente disposti e coincidenti per un lato uguale, quali punti

sono rappresentati in figura in *m, n, o* in grandi dimensioni, poichè le liste A, B, D sono fra loro equivalenti per avere la stessa base $ph = p'h' = p''h''$ e la stessa altezza $pk = p'k' = p''k''$, così le lince *ab, cd, efg*. . . . che esse rappresentano, sebbene di diversa lunghezza, diremo e riterremo come equivalenti, tali infatti esse risultano nella formazione delle figure come si dirà.

(Fig. 77ª) Siano le coordinate *xy, kz*, e nel loro piano la *ge* parallela alla *kz*, nonchè quante vogliansi linee rette, curve, spezzate o miste *ab, asb, amb, anb, aof, ag* . . . . comprese tra le parallele *kz, ge,* e *tali che si possano raccogliere le proiezioni dei singoli punti di ciascuna sul segmento* ab *dell'ordinata* xy, *in modo che per punti della stessa linea, le proiezioni non si sovrappongano;* ed allora le linee *ab, asb, amb, anb, aof. ag....*, come linee del secondo stato, sono *equivalenti* per essere liste di ugual generatrice rettilinea piccolissima e della stessa altezza *ab*.

a) L' insieme delle dette linee costituisce un *fascio di equivalenti lineari*, del quale la linea *ab* giacente sulla *xy* è *fondamentale*.

b) Qualunque linea del fascio che non coincida in tutta la sua estenzione con la *ab* diremo *alterazione geometrica* di questa, e due linee qualunque del fascio diremo *dilatazione* o *contrazione* l'una dell'altra, secondochè l'una abbia maggiore o minore lunghezza dell'altra.

c) *È evidente che nel fascio ogni alterazione della fondamentale* ab *è sua dilatazione; che la fondamentale* ab *è la massima contrazione delle linee del fascio, e che la massima dilatazione di una linea qualunque del fascio è infinita.*

d) (Fig. 75ª) Nel fascio la sola fondamentale *ab*,

come linea non alterata, si ritiene formata da k punti grafici quadrati, tutte le altre linee del fascio sono alterate e devono ritenersi come formate ciascuna da k parallelogrammi determinati dalle intersezioni con esse dei prolungamenti dei lati dei punti quadrati, normali alla xy, come in grandi proporzioni si vede in A, B, D; talchè

I punti grafici costituenti per somma una linea alterata sono tanti quanti quelli costituenti la sua contrazione massima.

È facile vedere che ai punti grafici formanti per somma una alterata, non può attribuirsi la forma di losanghe.

e) (Fig. 77ª) *Un fascio d'equivalenti lineari che ha la fondamentale* ab' *sulla* zk *coordinata alla* xy, *diremo pure coordinato al fascio di fondamentale* ab.

f) *Una linea di un fascio diremo* coniugata *con una linea di altro fascio coordinato o no, se le due linee hanno una loro contrazione scambievolmente perpendicolare e concorrono come fattori alla formazione di una figura.*

269. In taluni trattati di geometria elementare si definisce una superfice piana come generata da due rette fra loro perpendicolari, delle quali l'una parallelamente a sè stessa percorre tutti i punti dell'altra.

In altri dicesi la superfice piana generata da due rette delle quali una per un suo estremo percorre tutti i punti dell'altra parallelamente a sè stessa.

Altri dicono: la superfice generata da due rette congiunte per un loro estremo, è il prodotto dell'una per la perpendicolare abbassata dal suo estremo non comune sull'altra; ed anche il prodotto degli n punti costituenti una retta per gli m punti di altra ad essa perpendico-

lare genera una superfice che ha il valore quadrato *mn*. . . .

Quando voglia bene osservarsi queste ed altre simili definizioni rispondenti a casi speciali, non soddisfano alla formazione generale delle aree delle infinite figure piane rettilinee e curvilinee. Ciò avverrà finchè si considerino le linee generanti una figura nella sola loro lunghezza; ma se le stesse linee vogliansi considerare come liste geometriche appartenenti ad un fascio d'equivalenti lineari, allora poichè *qualunque linea del fascio è costituita dello stesso numero* k *di punti grafici della fondamentale*, restano facilmente spiegati i fenomeni della formazione delle figure, nonchè il valore delle loro aree.

Figure generate da linee considerate come liste semplici

270. *Se due linee aventi un punto comune, sono tali che le proiezioni dei punti grafici costituenti ciascuna, si possono raccogliere senza sopramontarsi sopra una rispettiva contrazione rettilinea, e che dette contrazioni siano scambievolmente perpendicolari, allora una delle due linee, percorrendo parallelamente a se stessa tutti i punti dell'altra purchè non s' intrecci con essa, genera una figura quadrilatera della quale l'area è il rettangolo delle loro contrazioni perpendicolari, ovvero anche il prodotto* mn *degli* m *punti grafici costituenti una linea per gli* n *punti grafici formanti l'altra.*

Infatti: 1. (Fig. 78ª A) Le *amb*, *and* abbiano per rispettive contrazioni massime le *ab*, *ap*. La *and*, parallelamente a sè stessa e col suo estremo *a*, percorra tutti i punti della *amb*, ne resta generata l'isoscelica *mn'm'n* di area *abed* : ma *abed* = *abop*, rettangolo delle contrazioni massime delle due linee fattori. La stessa area

è il prodotto dei punti grafici costituenti una delle linee fattori per quelli formanti l'altra, poichè se la contrazione massima ab si forma di q punti grafici quadrati, la sua dilatazione amb si compone di q punti grafici parallelogrammi e le due linee sono equivalenti (264); così, se la contrazione massima ap si forma di r punti grafici quadrati la sua dilatazione and si costituisce di r punti grafici parallelogrammi e le due linee sono equivalenti; e però avremo

$amb \times and = ab \times ap = ab \times ad = qr.$

Consegue che quando i fattori geometrici amb, and sono fra loro uguali, trovasi $amb \times and = \overline{ab}^2 = \overline{amb}^2$, intendendosi per $\overline{amb}^2$ il valore dell'area, e non la forma apparente della figura generata.

2. (Fig. 78ª B) Le coniugate o fattori grafici amb, $a'nd$ abbiano un punto comune o, e sia ad ipotesi az contrazione massima della amb. Per il punto o e parallelamente a sè stessa, si facciano percorrere alle $a'nd$ tutti i punti della amb; ne resta generata l'isoscelica $m'n'm''n''$ nella quale il quadrilatero delle corde $a''d'b''b'$ è un parallelogramma.

Si tracci $a''z'$ parallela alla az e si abbassi ad essa per b' la perpendicolare ad incontrare in s la corda $d'b''$; si prolunghi questa corda, ed in a'' si elevi alla $a''z'$ la perpendicolare ad incontrarla in p. Avremo parallelogramma $a''d'b''b' = pa''b's$ per avere ugual base ed altezza, e per la stessa ragione $pa''b's = a''z' \times a''p$ rettangolo delle contrazioni delle linee fattori; ma la $a''z$ è contrazione massima della amb, mentre $a''p$ non è contrazione massima della and, ossia nel caso contemplato le coniugate, fattori grafici, appartengono a due fasci non coordinati d'equivalenti lineari.

Inoltre, per appartenere allo stesso fascio, le amb e la az si formano dello stesso numero h di punti grafici e sono fra loro equivalenti, come anche $a'nd$ si forma dello stesso numero k di punti grafici della $a''p$ e sono fra loro equivalenti, e perciò $\wedge\, n'm''n''m' = a''z' \times a''p = amb \times a'nd$, rappresentando questo ultimo prodotto in punti grafici quadrati, il valore dell'area e non la forma apparente della figura $\wedge\, n'm''n''m'$.

271. Riteniamo sufficente il teorema precedente a far conoscere la formazione delle figure generate da due fattori grafici considerati come liste semplici. Tali figure comprendono tutte le isosceliche che hanno per quadrilatero delle corde un parallelogramma.

Tanti casi speciali che possono di per sè stessi considerarsi enunciati di altrettanti teoremi, trovano la loro dimostrazione in quello svolto. Ne enunciamo taluni lasciandone la dimostrazione ai nostri lettori.

1. Più linee di qualsiasi forma, purchè se ne possano raccogliere le proiezioni non intrecciate dei singoli punti sopra una loro contrazione rettilinea scambievolmente uguale, danno uguale prodotto, sè moltiplicate per lo stesso segmento rettilineo, o anche per altra linea di qualsiasi forma, purchè si possano raccogliere sopra una sua contrazione rettilinea le proiezioni non intrecciate dei singoli suoi punti, e ciò finchè l'angolo che formano le due linee fattori sia tale, che l'una per un suo punto percorrendo l'altra non s' intrecci con questa.

2. Se un segmento rettilineo per un suo punto percorre parallelamente a sè stesso il perimetro di un triangolo, genera con i lati di questo tre quadrilateri, dei quali l'area di uno è equivalente alla somma delle aree degli altri due.

a) I tre quadrilateri possono cangiarsi in altrettante isosceliche semplici, senza che resti alterato il rapporto delle loro aree.

3. Se in un poligono di n *lati sia regolare o no, si traccia una diagonale tale che si possano raccogliere su di essa senza intrec-*

ciarsi le proiezioni rette o oblique dei vertici del poligono, e si faccia percorrere per un suo punto il perimetro del poligono da un segmento rettilineo parallelo al fascio delle proiettanti i vertici, ne restano generati n *quadrilateri dei quali la somma delle aree di quelli situati da una parte della diagonale, è equivalente a quella dei quadrilateri situati dall'altra parte della diagonale stessa.*

a) Si possono assumere i quadrilateri così generati come quelli delle corde di altrettanti quadrilateri ⋀ semplici, senza che resti alterato il rapporto del valore rispettivo delle aree.

4. Moltiplicando una curva circolare o no nel senso della sua convessità ovvero della sua concavità per un segmento rettilineo il quale per un suo estremo percorra la curva parallelamente a sè stesso, si ottiene uguale prodotto.

a) Il fattore grafico rettilineo può sostituirsi con altro curvilineo del quale il primo sia corda o contrazione, purchè tale che percorrendo la curva in tutta la sua estenzione non s' intrecci con essa, senza per questo alterare il valore dell'area della figura generata.

5. In un circolo tracciato un diametro ed una secante comunque inclinata con esso. Se si determina sulla secante, a partire dalla sua intersezione col diametro un segmento, e questo per lo stesso punto d' intersezione parallelamente alla secante e dalla stessa parte di essa, si fa percorrere tanto il segmento del diametro che l'arco della circonferenza compreso tra l'estremo del diametro e la secante, ne restano formate due figure l'una curvilinea l'altra retlilinea di area equivalente ecc. ecc.

272. *I rapporti di quadratura che la geometria determina fra i lati e segmenti di una figura rettilinea si applicano e verificano tra le aree dei quadrati delle curve o spezzate costruite sui lati rettilinei della figura assunti come corde. Per figura quadrata intendiamo la isoscelica la quale ha per quadrilatero delle corde il quadrato.*

Il teorema di Pitagora e suoi derivati, quello di Euler, quello di Tolomeo, e quanto dicemmo sulle

serie triangolari tanto addizionali che differenziali e simili, si applicano alle aree delle figure curvilinee e mistilinee quadrate, purchè il contorno di tali figure non s'intrecci, come sarà facile verificare.

273. *Come talvolta con operazioni geometriche si ottiene espresso in valore lineare il prodotto di due o più segmenti rettilinei, così con le stesse o simili operazioni si possono esprimere in valore lineare i prodotti tra segmenti curvilinei e mistilinei.*

Ad esempio: *Nel circolo* c *di raggio* 1 *il quadrato di un arco è espresso in valor lineare dalla sua doppia proiezione retta sopra un diametro che parte da un suo estremo,* avremo cioè (Fig. 24ª A) arco $\overline{1.4.o}^2 = 2.oh = o.2' = \overline{o.1}^2$.

Infatti l'arco 1.4.*o* è dilatazione della corda *o*.1, e si compone dello stesso numero *k* di punti grafici, e poichè $\overline{o.1}^2 = o.2' = \overline{k}^2$, sarà anche arco $\overline{1.4.o}^2 = \overline{k}^2 = o.2'$.

Per la stessa ragione avremo arco $o.1' \times o.3 =$ $=$ corda $o.1' \times o.3 = o.4'$.

Supposto come al (124.3°) che sia *o*.4' potenza ennesima di *o*.1' fatta corda *o*.4 = *o*.4' sarà arco 4.*o* potenza ennesima di quello *o*.1.

Questa facoltà, che facilita ed abbrevia il calcolo geometrico, dà origine a vari interessanti teoremi che siamo dolenti non ci sia concesso di svolgere.

274. Nel quadrato unitario *coao'* si descriva il quadrante *o'o''o* (Fig. 79ª) e si traccino quanti vogliansi raggi *co''*, *co'''* .... e dai loro estremi le perpendicolari *o''h*, *o'''h'* alla *co*. Sulla base comune *co* si costruiscano le losanghe *coa'o''*, *coa''o'''* .... I lati di queste essendo uni-

tari, consegue che le rispettive altezze co', ho'', $h'o'''$.... sono i seni dei rispettivi angoli oco' oco'', oco'''.... e per le loro rispettive aree avremo $coao' = \frac{1}{2} \times$ seno $_1$ » » $coa'o'' = 1.ho''$. seno $_{oco''}$ » $coa''o''' = 1.h'o''' \times$ seno $_{oco'''}$; ma due angoli consecutivi di una losanga sono supplementari, e però **le aree delle losanghe di lato unitario stanno fra loro come i seni dei rispettivi angoli.** Di ciascuna losanga si moltiplichi per m il lato unitario co e per n il lato consecutivo pure unitario co', ne resteranno formati altrettanti parallelogrammi $cbfd$, $cbf'd'$, $cbf''d''$.... dei quali evidentemente le aree rispettive sono $cbfd = cb \times cd \times$ seno $_1$ » $cbf'd' = cb \times cd' \times$ $\times$ seno $_{bcd'}$ » $cbf''d'' = cb \times c'd'' \times$ seno $_{bcd''}$..... ecc.: ma due angoli consecutivi di un parallelogramma sono supplementari e da ciò:

1. *L'area di un parallelogramma è il prodotto di due suoi lati consecutivi per il seno dell'angolo che essi formano.*

2. *In un parallelogramma il prodotto della base per l'altezza è uguale al prodotto di due lati consecutivi per il seno dell'angolo che essi formano.*

3. *In un triangolo l'area è il semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo che essi formano.*

4. *In un quadrilatero, tracciata una diagonale, l'area è la somma dei semiprodotti delle coppie di lati dall'una e dall'altra parte della diagonale moltiplicati ciascuna per il seno dell'angolo che essi formano.*

5. *In un poligono irregolare, tracciate le possibili diagonali da un vertice, l'area si forma della somma dei prodotti successivi delle linee radianti due a due da quel vertice, ciascun prodotto moltiplicato per il seno dell'angolo che formano le due linee fattori.*

6. *L'area* A *di un poligono regolare di* n *lati, del quale sia* s *angolo al centro, è* $A = \text{seno}\ s \times \frac{n}{2}$.

Una figura isoscelica qualunque, per avere l'area uguale a quella del rispettivo poligono delle corde, si misura nei modi sopra esposti, operando sul rispettivo poligono delle corde.

275. *Il valore dell'area di una figura isoscelica, della quale il poligono delle corde non è un parallelogramma, ossia che detto valore non è il prodotto diretto di due fattori grafici lineari, esso è parte ennesima di uno di detti prodotti, ovvero anche somma di più prodotti di coppie di fattori grafici lineari.*

(Fig. 80ª) Per l'intersezione *c* delle diagonali, ovvero centro di un parallelogramma qualunque *abed*, si traccino quante vogliansi direzioni *ae*, *fg*, *hi*, *km* .... Ciascuna di esse evidentemente divide l'area del parallelogramma in due figure uguali inversamente disposte, delle quali l'area di ciascuna è la metà di quella del parallelogramma *abed*; talchè avremo $aeb = fgeb = amkb ... = \frac{ab \times ad}{2} = \left(\frac{ab \times ad}{2}\right)$. seno $_{bad}$. Ora, se i triangoli e trapezi così formati si assumono come poligoni delle corde di altrettante isosceliche, l'area di ciascuna sarà $A = \frac{ab \times ad}{2}$, ovvero $\left(\frac{ab \times ad}{2}\right)$. seno $_{bad}$, quando nel primo caso sia *ad* l'altezza e nel secondo caso non sia *ad* l'altezza del parallelogramma *abed*.

(Fig. 81ª) Sia *badb'a'd'* poligono pari di lati due a due uguali è paralleli ed anche poligono delle corde della isoscelica *mnom'n'o'*; tracciate le *aa'*, *bb'*, risulta evidentemente triang. *acb* = *a'cb'* e figura *abm* = *a'b'm'*. Pon-

gasi triangolo $a'cb'$ e figura $a'b'm'$ in abc', in modo che il lato $a'b'$ coincida sul suo uguale ab, e linea $a'm'b$ sulla sua uguale amb; ne resta formato il parallelogramma $acbc'$, ed avremo $cbma + ca'm'b' = acbc' = (ca \times cb)$. seno $_{acb}$: in modo analogo $cbnd' + cdn'b' = (cb \times cd')$. seno $_{bcd'}$, e $cd'oa' + cao'd = (cd' \times ca')$. seno $_{d'ca'}$: talchè, chiamando con z, x, r.... gli $\frac{n}{2}$ angoli consecutivi al centro del poligono, l'area di questo, e però anche dell'isoscelica della quale i suoi lati sono corde, sarà

$$A = (ca \times cb).\text{seno}_z + (cb \times cd').\text{seno}_x + (cd' \times ca').\text{seno}_r$$

e così, essendo n i lati del poligono, la sua area è somma di $\frac{n}{2}$ parallelogrammi e però costituita di $\frac{n}{2}$ prodotti di due fattori lineari,

a) Sarà facile dimostrare che anche nei poligoni isoscelici di apparente numero dispari di lati, tali cioè da potersi ridurre in poligoni pari di lati, come anche l'area dei poligoni Λ pari di lati nei quali le corde dei lati due a due uguali non sono parallelamente disposte, sempre il valore dell'area si forma della somma di $\frac{n}{2}$ parallelogrammi, e quindi delle somme dei prodotti di più coppie di fattori grafici lineari.

276. Fra le figure generate da due linee considerate come liste semplici, delle quali l'una per un suo punto percorre l'altra parallelamente a sè stessa, meritano speciale attenzione le *intrecciate* delle quali cioè due distinti punti del perimetro si sovrappongono intrecciandolo.

Le figure A, B, C D (Fig. 83ª) sono intrecciate.

Sia un segmento lineare curvo, spezzato o misto, diremo per brevità **curvatura** *la sua convessità o concavità riferita ad una assegnata direzione sul piano.*

Esiste un limite di curvatura scambievole oltre il quale due fattori lineari grafici cessano di generare una isoscelica semplice, della quale cioè l'area è quella del suo quadrilatero delle corde, e generano invece una figura ripiegata.

(Fig. 82ª) Due circoli secanti *c, o* siano di uguale o diverso raggio. Se i loro raggi *ca*, *oa* » *cb*, *ob* diretti agli estremi *a*, *b* della corda comune, sono fra loro perpendicolari, essi sono anche scambievolmente tangenti in *a*, *b* alle circonferenze dei due circoli.

Nel circolo *c* si assumano i lati *ab, ad* del quadrato iscritto come contrazioni massime degli archi *amb* = = *asd* = 90°. Se *asd* percorre per l'estremo *a* tutti i punti dell'arco *amb*, ne resta formato il triangolo sferico *ads'bm* il quale è isoscelico semplice.

Infatti il raggio *cb* è tangente in *b* agli archi uguali *bma*, *bs'e*, onde questi archi hanno comune il solo punto *b*, il quale essendo anche vertice del quadrilatero delle corde della figura curvilinea, questa è isoscelica semplice, ossia equivalente al suo quardilatero delle corde.

Nei due circoli secanti *c*, *o'* i raggi formino negli estremi *a*, *b* della corda comune angoli ottusi; allora l'arco *asd* percorrendo per il suo estremo *a* tutti i punti di quello *anb*, genera il quadrilatero *nsn's'* il quale è isoscelico semplice; poichè gli archi *bma*, *bs'e* di corde *ba*, *be* hanno comune il solo punto *b*, nel quale sono tangenti, quindi gli archi di maggiore apertura e di corde uguali *bna*, *bs'e* hanno comune il punto *b* nel quale sono secanti, ma questo punto è vertice del quadrilatero delle corde di quello curvilineo *nsn's'* il quale è però isoscelico semplice.

Nei circoli secanti *c*, *o''* i raggi agli estremi *a*, *b* della corda comune formino angoli acuti: fatto percor-

rere l'arco *asd* quello *arb*, ne resta formata una figura curvilinea la quale avrà il perimetro intrecciato in un punto *z*.

Infatti, si elevi *bt* perpendicolare all'estremo del raggio *o''b* e perciò tangente in *b* all'arco *arb*; poichè *cb* è tangente in *b* all'arco *bs'e*, e le due tangenti formano tra loro l'angolo *cbt* tagliando in *h*, *h'* gli archi *arb*, *bs'e*, così questi archi dovranno intersecarsi oltre che nel punto *b*, in un secondo punto *z* situato dentro l'apertura dell'angolo *cbt*.

Sommando nei tre casi gli archi fattori grafici, per i circoli secanti *c*, *o* poichè arco $amb = asd = 90°$, sarà arco $amb + asd = 180°$.

Nei circoli secanti *c*, *o'* abbiamo arco $asd = 90°$, arco $anb < 90°$ e quindi $asd + anb < 180°$.

Nei circoli secanti *c*, *o''* abbiamo arco $asd = 90°$, arco $ard > 90°$, quindi arco $asd + arb > 180°$: e però

Se i fattori grafici di una figura quadrilatera sono archi circolari di qualsiasi raggio, essa sarà isoscelica semplice equivalente al suo quadrilatero delle corde, se la somma dei due archi fattori è uguale o minore alla semicirconferenza, la stessa figura sarà invece **intrecciata** *se la somma dei due archi fattori è maggiore della semicirconferenza.*

Siccome poi in ciascuno dei due archi fattori possiamo iscrivere un frammento di poligono regolare o no, così il detto limite si estende alla curvatura di tutte le coppie di fattori grafici che siano segmenti di linee spezzate o miste iscritte in quelli archi.

Le figure intrecciate sono innumerevoli e però qui ci limitiamo a dare un cenno di quelle generate da due frammenti di poligoni regolari di uguale raggio e numero pari di lati, che per la loro forma diremo **poligoni caudati**.

277. (Fig. 83ª c) Sui lati *ae*, *ai* del quadrato *aemi* come diametri si descrivano i semicircoli *ace*, *agi* volti nello stesso senso. S' iscrivano nei semicircoli i semiperimetri *abcde*, *afghi* di un poligono regolare pari di lati. Al semiperimetro *afghi* per il suo estremo *a* si faccia percorrere tutti i punti di quello *abcde*, ne resta generato il poligono caudato *akmce* intrecciato in *c*, costituito di due figure poligonali distinte, e cioè Q *corpo*, P *appendice* o *coda*.

a) Il poligono generatore del caudato deve essere pari di lati, affinchè il suo semiperimetro sia esattamente iscrittibile nella semicirconferenza.

b) La curvatura di ciascuno dei fattori grafici, essendo la semicirconferenza la somma delle loro curvature, è $360° > 180°$ limite assegnato alla somma delle curvature dei fattori lineari della isoscelica semplice (276), e però il caudato è di necessità figura intrecciata.

c) Sui lati *ae*, *ai*, come contrazioni massime, si possono raccogliere senza che si soprammontino le proiezioni di tutti i punti grafici q costituenti i semipoligoni fattori; quindi il loro prodotto è q^2, ossia l'area del quadrato circoscrittibile al circolo nel quale sono iscritti i semipoligoni generatori; il valore q^2 dell'area del caudato non è però reale, ma solo relativo a tutte le isosceliche che possono costruirsi in gruppo isoscelico (189) sui lati del quadrato delle sue corde, mentre l'area vera del caudato è maggiore di $\overline{q}^2$: poichè se n sono i lati di ciascun semipoligono generatore, detta area si forma di $\overline{n}^2$ prodotti grafici ciascuno di due fattori lineari, i quali per la loro diversa scambievole inclinazione, maggiore di quella assegnata come limite alle isosceliche semplici, sul piano parte si dilatano e parte si sopramontano alterando la forma

dell'area della figura, la quale diviene perciò maggiore di quella $\overline{q}^2$ prodotto dei due semiperimetri considerati come generatrici di liste semplici.

d) *L'area di un caudato è quadrabile* perchè costituita della somma delle aree di due figure rettilinee (Fig. 83ª D); fa eccezione il caudato curvilineo generato dà un semipoligono di un numero infinito di lati (semicirconferenza), che percorra con un suo estremo altro semipoligono uguale. L'area di questo è solo quadrabile con l'approssimazione del rapporto π della circonferenza al diametro.

e) *La differenza tra l'area effettiva del caudato e quella* $\overline{q}^2$ *del suo quadrato delle corde, cresce in ragione del numero dei lati dei semipoligoni generatori.*

f) Per quanto riguarda la geometria elementare questi poligoni hanno importanza limitata alla loro misura, della quale perciò ci restringiamo a trattare.

278. *Il punto d' intreccio del perimetro di un caudato coincide con quello delle semicirconferenze nelle quali sono iscritti i due semipoligoni fattori, nel solo caso in cui ciascuno di essi è metà di un poligono regolare, del quale il numero* n *dei lati è potenza del* 2.

Infatti, la quarta parte di una potenza del 2 è numero intero; e per un poligono regolare iscritto del quale il numero n dei lati è potenza del 2, in un quadrante sono iscritti esattamente $\frac{n}{4}$ dei suoi lati; ma nella formazione del caudato (Fig. 83ª c) le semicirconferenze c' c'' che hanno i diametri scambievolmente perpendicolari si tagliano in c nei quadranti $cba=cde$ » $ch'm=cqe$; quindi

dentro i quadranti *cqe* = *cde* risulterà iscritto un numero intero esatto di lati del poligono generatore, e però il perimetro del caudato s'intreccia nello stesso punto d'intersezione *c* delle semicirconferenze *c'*, *c''*.

Il numero pari degli *n* lati del poligono generatore del caudato non sia potenza del 2, esso sarà della forma $n=2p$ ove p è intero e dispari; nella (Fig. 83ªB) in ciascuna semicirconferenza *o'*, *o''* è iscritto un semipoligono di un numero *p* dispari di lati, talchè, come vedesi in figura, nella formazione del caudato, l'intersezione *s* del suo perimetro non può coincidere con quello *o* delle semicirconferenze *o' o''*.

279. *Considerando la circonferenza come poligono di* n *lati infinitamente piccoli, il numero* n *sarà sempre potenza del* 2.

Infatti le semicirconferenze *c*, *o* generino il caudato (Fig. 83ª D); se si suppone che le dette semicirconferenze si formino di lati successivi uguali e piccolissimi, nella formazione del caudato, l'intersezione *o'* è comune tanto alle semicirconferenze quanto ai semipoligoni di lati piccolissimi, e però per il precedente, il numero *n* di questi nel poligono generatore è potenza del 2.

280. *L'area del caudato, del quale il numero dei lati del poligono generatore è potenza del* 2, *è uguale al quadrato delle corde del caudato stesso aumentato del triplo dell'area della sua appendice.*

(Fig. 83ª c) Infatti, sia *aemi* quadrato delle corde del caudato QP, del quale il poligono generatore abbia un numero di lati potenza del 2. Collocando il semipoligono *agi* nel posto del suo uguale *ecm*, e quello *izm* nel posto del suo uguale *ace*, si sovrappongono della

losanga P appendice del caudato, quindi l'area di questo è $A = \overline{ae}^2 + 2.P + P'$. Si dimostra facilmente che $P' = P$, e però $A = \overline{ae}^2 + 3.P$.

(Fig. 83ª D) Sia il caudato di un numero infinito di lati. Si ponga il semicircolo *c* nel posto del suo uguale *o'*, e quello *c'* nel posto del suo uguale *o*. L'area del caudato risulta $A = \overline{ap}^2 + 2.R + R'$; ma per quanto dimostrammo al 169 $R' = R$ e però $A = \overline{ap}^2 + 3.R$.

(Fig. 83ª A) Il caudato generato dai semiquadrati *acb*, *ade*, si forma del rettangolo *adfg* e dell'appendice lineare *cb*; ma il numero dei lati del quadrato è potenza del 2, e però area $A = adfg + 3.cb$; pertanto rettangolo $adfg = \overline{ab}^2$, e però se *k'* è lato infinitamente piccolo del punto grafico quadrato formante la retta *cb*, sarà $A = \overline{ab}^2 + cb \times 3.k'$; *ossia* A *è somma del quadrato* ab *delle corde, e di un rettangolo avente per base il lato del quadrato generatore e per altezza il triplo di quella del punto grafico formante questo lato.*

281. Data sul piano una linea ed una direzione, se le proiezioni su questa dei singoli punti grafici costituenti la prima si sopramontano in tutto o in parte, diremo la linea *ripiegata rapporto alla direzione.*

a) Il segmento della direzione sul quale si raccolgono le proiezioni dei punti della linea ripiegata diremo sua *contrazione ripiegata.*

b) Quando delle due contrazioni coordinate dei fattori grafici di una figura, una ovvero ambedue siano ripiegate, la figura generata è *pure ripiegata.*

c) Quando dei due fattori grafici uno solo ha contrazione ripiegata, la figura generata è *ripiegata semplice*; se le contrazioni dei fattori sono ambedue ripiegate, la figura è *ripiegata intrecciata.*

d) Queste figure, alle quali appena accenniamo, si formano della sovraposizione sul piano di quelle generate dalle coppie di segmenti progredenti o retrocedenti dei quali si formano i due fattori grafici lineari.

e) *L'area di una ripiegata tanto semplice che intrecciata è quadrabile, se i fattori grafici sono rettilinei, ovvero se essendo curvilinei o mistilinei, sia possibile decomporre la figura generata, in tante isosceliche o altre figure quadrabili, delle quali l'area della prima sia somma,* come già dicemmo.

282. Fra segmenti curvilinei e mistilinei va distinta l'*equivalenza*, la *proporzionalità* e la *similtudine.*

a) *Due o più segmenti sono equivalenti se hanno uguali contrazioni massime* poichè in tal caso si considerano come formati dallo stesso numero k di punti grafici.

b) Due o più coppie dei detti segmenti sono *proporzionali, se le contrazioni massime dei segmenti di una coppia sono fra loro nello stesso rapporto di quelli dei segmenti di un' altra coppia.*

c) *Due segmenti sono simili se hanno la stessa forma e diversa grandezza; essi sono proporzionali alle rispettive contrazioni massime se riferiti alla stessa unità lineare; nel caso però che si assumano come figure di egual forma, misurate da unità di diversa grandezza, allora devono ritenersi come equivalenti.* Così ciascuno degli archi a, a', a'' .... sia $\frac{1}{n}$ delle rispettive circonferenze c, c', c'' di diverso raggio; se riferisconsi alla stessa

unità lineare, come archi di ugual misura sono simili e stanno fra loro nel rapporto delle rispettive corde o raggi; se poi i raggi dei circoli c, c', c'' si ritengono come unità di diverse grandezze destinate alla misura di figure simili o nò di forma, allora gli archi a, a', a'' di ugual misura devono ritenersi come equivalenti, ossia come formati ciascuno dello stesso numero k di punti grafici.

d) *Quando un segmento curvilineo è considerato in sè stesso, si adotta la sua corda come contrazione massima.* Così la contrazione massima dell'arco 90° è il lato del quadrato iscritto; quella dell'arco 120° è il lato del triangolo equilatero iscritto; quella della semicirconferenza è il diametro: ossia nel circolo di raggio 1, l'arco 90° è equivalente a $\sqrt{2}$, l'arco 120° è equivalente a $\sqrt{3}$, l'arco 180° è equivalente a 2 ecc.

283. Il lato az (Fig. 84ª) dell'angolo curvilineo irregolare zay sia diviso in segmenti amb, abd, ade . . . ., e sul lato ay sia dato il segmento anf. Voglia dividersi il lato ay in archi che stiano con quelli nei quali è diviso il lato az nel rapporto $amb : anf$.

Si tracci un angolo rettilineo arbitrario $z'ay'$, e le corde ab, ad, ae . . . . af dei dati segmenti; sul lato az' si faccia $ab' = ab$ » $ad' = ad$ » $ae' = ae$ . . . ., e sul lato ay' si prenda $af' = af$, si tracci $b'f'$ e per i punti d', e'..... altrettante parallele ad essa $d'g'$ » $e'h'$ . . . ; i segmenti ag', ah' si portino come corde dal vertice a sul lato ay in ag, ah : avremo $amb : abd : ade : \ldots . : : anf : afg : agh : \ldots$

Infatti ciascun arco amb, abd, ade . . . . anf è equivalente alla rispettiva corda assunta come contrazione massima, e poichè per costruzione $ab' : ad' : ae' : \ldots . : : : : af' : ag' : ah' : \ldots .$ così sarà anche $amb : abd : : ade : \ldots . : : anf : afg : agh : \ldots .$

Consegue che fra segmenti curvilinei o mistilinei, considerati come figure del secondo stato geometrico, si possono effettuare tutte le operazioni eseguibili fra i segmenti rettilinei; ossia con segmenti curvilinei potremo formare delle proporzioni o progressioni, costruire la serie di potenze; estrarre l'ennesima radice di un dato segmento ecc. e ciò finchè si possano raccogliere senza sopramontarsi le proiezioni dei singoli punti del segmento curvilineo o mistilineo sopra la sua corda o sopra altra linea data come sua contrazione massima. In ugual modo si vede come *le costruzioni grafiche e proprietà geometriche possibili tra figure simili rettilinee, si possono eseguire senza eccezione tra figure curvilinee, che abbiano i lati delle prime come corde.*

CAPITOLO V.

Delle figure di area quadrabile per approssimazione

284. Paragonando il colcolo geometrico col numerico, trovasi che il primo presenta mezzi più perfetti, sia per esprimere le quantità, sia nel dare i risultati esatti delle operazioni effettuate tra quelle quantità.

Infatti, nel calcolo aritmetico i numeri si distinguono in *finiti*, *indefiniti* e *irrazionali*.

Sono indefiniti i numeri che legati alla unità per un riconosciuto rapporto, non possono però esprimersi nella loro integrità mediante i caratteri di un dato sistema di numerazione; ad esempio, nel sistema decimale più in uso per la sua facile ed estesa applicazione, si esprimono in modo indefinito tutti quei numeri che sono $\frac{1}{n}$ dell'unità e suoi multipli in-

teri, allorchè n è diverso da 2 e da 5; come anche si esprimono con numeri indefiniti le radici di numeri interi che non siano per sè stesse numeri interi. *Sono poi irrazionali i uumeri indefiniti i quali, sfuggendo ad ogni analisi, non possono in alcun modo essere rapportati alla unità o suoi multipli.* Così il numero π valore dell'area del circolo di raggio 1 e simili sono irrazionali.

Le operazioni aritmetiche conducono a risultati numerici della stessa natura dei numeri sui quali siasi operato, così operando fra numeri indefiniti o irrazionali, od anche fra numeri finiti con indefiniti e irrazionali, si ottengono risultati che sono indefiniti o irrazionali.

Il calcolo, nei suoi diversi rami e forme, esclusa la geometria, non presenta caratteri capaci di dare una idea concreta dei valori indefiniti o irrazionali.

Nella geometria invece le quantità espresse con figure nei suoi tre stati geometrici, sono tutte finite, ossia **non esistono valori geometrici indefiniti o irrazionali**; così, ad esempio, possiamo determinare con esattezza rigorosa $\frac{1}{n}$ della unità o di un suo multiplo, ovvero anche la radice ennesima di qualsiasi quantità; e possiamo anche con una linea o una figura esprimere un valore irrazionale come quello π area del circolo di raggio unitario. Disgraziatamente, paragonando una figura con l'unità della sua spece, non sappiamo a vista e senza un' analisi speciale, formarci un' idea del loro giusto rapporto, sebbene questo esista accuratamente esatto *ed espresso in modo finito da quella figura geometrica;* ma non dobbiamo per questo, come ordinariamente si fa, attribuire alla geometria una deficenza esistente solo nella difficoltà che incontriamo nell' interpretarne i caratteri.

Inoltre ci serviamo dei numeri per esprimere il valore delle quantità geometriche, e siccome gran parte dei numeri non possono concretarsi e restano di forma indefinita o irrazionale, così le corrispondenti quantità geometriche che esprimono, abbenchè in sè stesse esatte, appariscono come indefinite ed irrazionali. Ad esempio, il lato del quadrato iscritto nel circolo di raggio unitario é valore geometrico finito, ma lo rendiamo apparentemente indefinito esprimendolo col segno $\sqrt{2}$ che dà solo un' idea generale del rapporto che passa fra l'unità ed il lato stesso, ovvero lo rappresentiamo col numero indefinito 1,4142....; così possiamo costruire esattamente un parallelepipedo del quale i lati o fattori siano $\sqrt{n} \times \sqrt{m} \times \sqrt{p}$, ma poi non sappiamo esprimere questo stesso volume con un numero finito.

La geometria più ricca di caratteri degli altri rami del calcolo, può esprimere tutti i numeri immaginabili con figure dei tre diversi stati geometrici; ad esempio, un numero k razionale o no, può rappresentarsi nel primo stato geometrico con un segmento rettilineo e con infiniti segmenti curvilinei e mistilinei, lo stesso numero k può rappresentarsi con infinite figure di variato contorno del secondo e terzo stato. *Questa proprietà permette nel calcolo geometrico di sostituire alla figura di uno stato quella di altro stato della quale il valore è espresso dallo stesso numero.* Di tale sostituzione abbiamo dato vari esempi anche in questo ristretto lavoro.

Di più nei tre stati geometrici le figure nel loro insieme costituiscono il *carattere geometrico* che in virtù della similitudine, risulta superiore al carattere usato in qualsiasi altro ramo del calcolo. Possiamo infatti nello stesso stato geometrico determinare ad arbitrio quante vogliansi unità di diversa grandezza, e riferite a queste

diverse unità, possiamo costruire infinite figure simili che rapporto alla rispettiva unità hanno lo stesso valore numerico. Trattando delle radici di segmenti maggiori di 2 vedemmo quanto riesca utile in pratica questa importante proprietà.

285. Una linea l sia divisa in due parti a, b, ciascuna di queste diciamo *complemento ad* 1 *dell'altra.*

L'area di un rettangolo $ad \times ab$ possiamo ritenere come formata dalla ad ripetuta tante volte quanti sono i punti grafici costituenti la ab; ma come linea del secondo stato, ad è una lista rettangolare, la quale ha per generatrice il lato piccolissimo $= 1$ del punto grafico quadrato, e la direttrice limitata alla lunghezza ad; talchè se ad si forma di k punti grafici, come lista geometrica essa è il prodotto $1.k$, e però tanto in valore lineare, quanto in valore quadrato avremo $ad = 1.k = k$. Possiamo quindi definire l'*area del rettangolo* ab $\times$ ad *come costituita della somma del prodotto grafico* ad $=$ k *ripetuto tante volte quanti sono i punti grafici costituenti la* ab.

Se i fattori grafici ad, ab sono contrazioni massime di alterate qualunque, purchè tali che la scambievole curvatura nel loro punto d'incontro non sia maggiore di 180°, sempre l'*area del quadrilatero curvilineo generato dalle alterate, è somma di una di esse ripetuta tante volte quanti sono i punti grafici costituenti l'altra.*

Aree così generate sono sempre quadrabili, e l'indicato metodo per computarne il valore diremo *sommatorio.*

L'area di una figura può essere somma di tanti prodotti lineari di diversa lunghezza, quanti sono i punti grafici costituenti una data linea suo fattore ab; in tal caso, se il valore lineare dei prodotti ordinatamente suc-

cessivi cangia secondo una data legge sia aritmetica che geometrica, finchè tal legge è nota, la figura generata appartiene alle così dette geometriche, ed il valore della sua area può essere computato col metodo sommatorio.

Spetta all'analisi superiore ed al calcolo differenziale integrale, lo stabilire le leggi alle quali devono ubidire i segmenti lineari successivi capaci di costituire con metodo sommatorio una figura che abbia per contorno una voluta curva, pertanto quando queste leggi appartengono alla aritmetica e geometria elementare, anche le figure generate possono essere analizzate e misurate con metodi geometrici elementari, come ci proveremo di dimostrare.

286. (Fig. 85ª) Nel metodo sommatorio si suppone che l'asse *as* delle ascisse di una curva *anbn'a'* sia diviso in un numero arbitrario di segmenti uguali piccolissimi, ciascuno dei quali rappresenta la base di una lista rettangolare sottolissima *nq* ordinata della curva. Le ordinate successive della curva stessa devono procedere variando di lunghezza secondo una assegnata legge aritmetica o geometrica. Ciò posto, si misura l'area *asa'b* di una figura facendo il prodotto $s.\overline{q}^2$ ove *s* è somma di tutte le ordinate successive che dall'origine *a* coprono l'area della figura, e *q* è uno dei segmenti uguali piccolissimi nei quali si è divisa l'asse *as* delle ascisse. Per la misura della curva *anbn'a'*, se partendo dall'origine *a* le differenze delle ordinate successive prese due a due sono d, d_{I}. d_{II}, d_{III} . . . , la rettificazione della curva sarà $\sqrt{d^2+q^2}+\sqrt{d_{\text{I}}^2+q^2}+\sqrt{d_{\text{II}}^2+q^2}$ . . . . *ossia la somma di tutte l' ipotenuse dei triangoli rettangoli piccolissimi i quali hanno per cateti la differenza tra due ordinate succes-*

sive ed uno dei segmenti uguali in cui è divisa l'asse as *delle ascritte.*

Il calcolo nel metodo sommatorio si abbrevia quando le ordinate della curva sono espresse da numeri finiti o in accertato rapporto con l'unità, e che le stesse ordinate crescono o decrescono in progressione aritmetica o geometrica; poichè in tal caso possono applicarsi le formule aritmetiche che danno la somma *s* dei termini di una progressione della quale sia noto il primo e l'ultimo termine.

287. *Col metodo sommatorio l'area di una figura curvilinea può calcolarsi esattamente se le ordinate alla curva sono espresse da numeri finiti, ed è solo calcolabile per approssimazione se le ordinate alla curva sono espresse da numeri indefiniti o irrazionali.*

Qualunque sia la legge che regola le ordinate alla curva ancorchè il valore di queste sia espresso da numeri indefiniti o irrazionali, l'area racchiusa tra la curva, la sua proiezione retta sull'asse delle ascisse e le due ordinate estreme, è sempre esattamente calcolabile, quando delle n *ordinate successive la metà procedono secondo una data legge e l'altra metà sono complementi a* k *delle prime, essendo* k *un numero finito arbitrario.*

Infatti (Fig. 85ª) Sia rettangolo $adho = k$, e nella sua area sia tracciata una curva $amx'b$, qualunque sia la legge che nè regola le ordinate; se l'area della mistilinea $adbx'm$ è somma delle n ordinate, quella della mistilinea $hbxmao$ è somma degli n complementi alle ordinate stesse; ed avremo $adbx'm + anbho = ad \times dh = k$. Sull'asse delle ascisse sia $ds = da = ho$; si costruisca la mistilinea $bdsa'n' = bhoamx'$; evidentemente sarà

anche mistilinea $asa'n'bx'm = ad \times dh = k$: pertanto, nella $asa'n'bx'm$ delle sue ordinate la metà costituenti la figura $bdsa'n'$ sono complementi inversamente ed ordinatamente disposti di quelli costituenti la figura $adbx'm$ e viceversa, quindi ecc.

Ancorchè le n *ordinate non siano disposte ordinatamente come gli* n *loro complementi, l'area della figura è sempre quadrabile.*

Infatti, sia la curva $byxb'=bx'mb'$, e le curve $b'ra$, $bn'a'$ siano in apparente continuazione della prima come lo erano già della seconda; tracciata la corda bb', avremo evidentemente figura $bb'xy=bb'x'm$, e però $asa'n'bx'm=$ $= asa'n'byxb' = ad \times dh = k$.

288. *Se l'area di una figura come la descritta è quadrabile, le aree parziali* s, s' *costituite l'una* s *della somma delle* n *ordinate, l'altra* s' *della somma degli* n *complementi ad esse, sono separatamente quadrabili solo quando le* n *ordinate ovvero i loro* n *complementi sono espressi da numeri finiti.*

Infatti, siano indefiniti o irrazionali i valori delle ordinate costituenti per somma la figura mistilinea $adbx'm$, anche l'area di questa sarà espressa da numero indefinito o irrazionale per essere somma di numeri della stessa natura; e sarà anche indefinita o irrazionale la differenza $k-adbx'm=bhoamx'=s$, somma dei complementi a k delle dette ordinate, poichè se s, s' sono l'uno numero finito e l'altro no, la loro somma risulta numero indefinito.

289. In virtù del superiore principio si vede che col metodo sommatorio si può calcolare l'area d'infinite figure isosceliche o no; questo metodo si sviluppa in una teoria che offre interesse scentifico, pertanto ci limitiamo

ad esporre solo alcuni teoremi che si riferiscono a talune figure formate da archi circolari, ed alla misura delle aree o segmenti di area delle coniche.

290. *Nel circolo due corde consecutive di archi non sovraposti si dicono completanti rispetto all'arco che le contiene; la corda di quest'arco è l'addizionale delle completanti.* Così le corde di due archi complementari sono completanti l'arco 90°, e la loro addizionale é la corda dell'arco 90°, lato del quadrato iscritto.

a) Se due completanti un arco sono fra loro uguali, ciascuna di esse dicesi completante media di quell'arco.

b) Nello stesso circolo o in circoli uguali, le corde di archi complementari diconsi complementari e supplementari si dicono le corde di archi supplementari (1).

Nei teoremi che seguono, parlando del circolo, deve intendersi che sia di raggio unitario; sarà facile agli studiosi estendere gli stessi teoremi a circoli di raggio $r \gtrless 1$.

291. (Fig. 86ª) Due circoli di ugual raggio siano tangenti esterni in a; si tracci per a la perpendicolare hh' alla linea cc' dei centri. **Qualunque retta** ef, gm, bd **parallela alla linea dei centri e terminante in due punti simmetrici delle circonferenze** c, c' **rapporto alla** hh', **è in valore lineare il quadrato della corda tracciata dal punto di tangenza** a **ad uno degli estremi dei detti segmenti lineari.**

Infatti, si tirino le corde $ae = af$ » $ag = am$ » $ab = ad$, e sulla linee dei centri si raccolgano le loro doppie proie-

(1) Vedi Trattato delle corde nel circolo.

zioni rette *zz'*, *kk'*, *cc'*. Poichè, la linea dei centri coincide coi diametri al punto di tangenza *a*, il quale è anche estremo comune alle corde, così per il più volte dimostrato, le rispettive doppie proiezioni sono i loro quadrati lineari, ed avremo

$\overline{ae}^2=\overline{af}^2=zz'=ef$ » $\overline{ag}^2=\overline{am}^2=cc'=gm$ » $\overline{ab}^2=\overline{ad}^2=kk'=bd$.

Da ciò provengono i seguenti teoremi facilmente dimostrabili, sulla misura delle aree con metodo sommatorio.

1. (Fig. 86ª) Due circoli di ugual raggio siano tangenti esterni in *a*, e una parallela *ef* alla linea dei centri ne incontri in punti simmetrici le circonferenze formando il triangolo mistilineo *esas'f*. Finchè la corda *ae* di uno dei lati circolari del triangolo è minore del lato del quadrato $\sqrt{2}$, talchè questo lato circolare è arco non maggiore di 90°, ovvero che la parallela *ef* non sia maggiore della distanza dei centri *cc'*=2 diametro, allora **l'area del triangolo mistilineo si forma della somma dei quadrati lineari delle infinite corde minori di quella** ae **che si possono tracciare per** a **dentro l'arco** ase **lato del triangolo.**

2. **Se la parallela alla linea dei centri** e'f'> 2 **diametro, e di conseguenza arco** am'f' > 90°, **e corda** af'> $\sqrt{2}$ **lato del quadrato, allora il triangolo** asg'e'f'm's' **in parte esterno al circolo, è ripiegato nella figura** e'eaff'm'g', **della quale l'area si forma della somma dei quadrati lineari delle infinite corde tracciate per** a **dentro l'arco** ase **e dei quadrati lineari di quelle tracciate per** a **dentro l'arco** g'xe', **ossia dei quadrati lineari delle corde comprese fra quelle** ag' **ed** ae'.

3. *Se i circoli* c', c'' *di ugual raggio sono esterni, una parallela* ff' *alla loro linea di centri purchè non maggiore della loro distanza, determina esternamente ai circoli un trapezio mistilineo* raff'n, *del quale l'area*

si forma della somma di quella del rettangolo ar×at *più di quella dei quadrati lineari di tutte le corde tracciate per* r *dentro l'arco* rnf'.

4. *Se la parallela* e"f" *alla linea dei centri è maggiore della distanza di questi, allora tracciata la tangente parallela* me'x, *il trapezio mistilineo è ripiegato nella figura* arf'e"xm'f"fs' *della quale l'area si forma della somma del rettangolo* ar×ah *con quella dei quadrati lineari delle infinite corde tracciate per* r *dentro l'arco* rnf', *più quella dei quadrati lineari delle infinite corde tracciate per* r *ad incontrare l'arco* xg"e".

292. (Fig. 87 A) **Due circoli** c, c' **di ugual raggio siano secanti. L'area della figura lenticolare** ambm', **costituita della parte nella quale i due circoli si sopramontano, si forma della somma dei prodotti lineari delle infinite coppie di completanti come** ra, rb **che possono iscriversi in uno degli archi** amb=am'b **del contorno della lenticolare.**

Infatti, sia *ra*, *rb* coppia di completanti l'arco *amb* di centro *c*.

Nel triangolo iscritto *arb* abbiamo $ra \times rb = 2.rh = rr'$ per essere il circolo *c* di raggio unitario, e però $hr = hr'$, ossia il punto *r'* è equidistante e simmetrico di quello *r* rapporto alla addizionale *ab* delle completanti. Ciò verificandosi per qualsiasi altra coppia di completanti lo stesso arco *amb*, consegue che i punti *o'*, *n'*, *m'*, *r'*, *s'* rapporto alla addizionale *ab*, sono equidistanti e simmetrici a quelli *o*, *n*, *m*, *r*, *s*, ossia per i primi passa un arco *am'b*=*amb* che appartiene alla circonferenza *c'* di ugual raggio di quella *c*; pertanto i punti *o'*, *n'*, *m'*, *r'* *s'*, sono estremi dei prodotti lineari di altrettante coppie di completanti l'arco *amb*, quindi l'insieme (somma) di questi prodotti lineari forma l'area della lenticolare *ambm'*.

293. **L'area del circolo A = π si forma della somma dei prodotti lineari delle infinite coppie dei lati dei triangoli rettangoli iscrittibili nella semicirconferenza.**

Infatti (Fig. 87ª A), in due circoli secanti *c*, *c'*, col diminuire della distanza dei centri, cresce l'area della figura lenticolare *ambm'* costituita della parte nella quale i due circoli si sopramontano: quando i centri *c*, *c'* coincidono nello stesso punto (Figura 87ª B), gli angoli curvilinei *a*, *b* della figura lenticolare raggiungono l'apertura uguale alla curvatura della circonferenza, e la detta figura si trasforma nel circolo *o*, nel quale gli estremi di un diametro qualunque possono segnare i vertici della figura lenticolare così ridotta, e però formata da due semicirconferenze *amb*, *am'b* nelle quali in qualunque coppia le completanti sono fra loro perpendicolari ed hanno il diametro come addizionale. Ma poichè nel triangolo rettangolo iscritto *anb* abbiamo $na \times nb = nn'$ corda del circolo, e ciò ripetesi per le infinite coppie di completanti la semicirconferenza *amb*, così l'area del circolo A = π *si forma della somma di tutti i prodotti lineari delle infinite coppie dei lati dei triangoli rettangoli iscrittibili nella semicirconferenza.*

294. (Fig. 87ª A) Si osservi che il massimo prodotto lineare di tutte le coppie di completanti l'arco *amb*, è quello *mm'* quadrato lineare della completante media $ma = mb$ e doppia freccia dello stesso arco.

La corda *rm* che congiunge l'estremo comune *r* di una coppia di completanti *ra*, *rb* coll'estremo *m* comune alle completanti medie, dicesi *corda integrante le completanti* ra, rb.

295. **La somma del prodotto lineare di due completanti un arco circolare col quadrato lineare della rispettiva integrante è uguale al quadrato lineare della completante media, ossia alla doppia freccia dell'arco.**

Infatti (Fig. 88ª) i circoli di ugual raggio *c, c'* si sopramontino della lenticolare *ambm'*, con lo stesso raggio si descriva l'arco *sms'* tangente nel punto medio *m* dell'arco *amb*; negli estremi della corda *ab* si elevino le perpendicolari *as, bs'*, e si completi il rettangolo *abs's*. Il triangolo mistilineo *bomes'* = *ams* risulta di lati circolari uguali e di base rettilinea *bs'* parallela alla linea dei centri, e però la sua area si forma della somma dei quadrati lineari delle infinite corde che possono tirarsi per *m* nell'arco *mob*; si traccino quante vogliansi parallele *eo'* alla linea dei centri tra gli archi *am'b*, *sms'*, e per la rispettiva intersezione *o* si traccino le completanti *oa*, *ob* e loro integrante *om*. Per qualunque coppia di completanti avremo costantemente $oa \times ob = oo'$, $\overline{mo}^2 = oe$ e però $oa \times ob + \overline{om}^2 = oo' + oe = o'e = mm'$ quadrato lineare della completante media $ma = mb$ e doppia freccia dell'arco *amb*.

296. (Fig. 88ª) La lista mistilinea *am'bs'ms* è equivalente al suo quadrilatero delle corde *abs's*, e questo è uguale al rettangolo circoscritto alla lenticolare *ambm'*. Chiamando R il rettangolo circoscritto, *s* l'area delle lenticolare che è somma degli infiniti prodotti lineari delle coppie di completanti, *s'* la somma dei quadrati delle infinite corde che possono tracciarsi per *m* dentro l'arco *mrb*, avremo $R = s + 2.s'$ » $s = R - 2.s'$ » $s' = \frac{R - s}{2}$; ossia *le somme* s, 2.s' *sono rispettivamente complementi ad* R.

Nel circolo, limite massimo delle lenticolari, del quale l'area è π ed il quadrato circoscritto è 4, avremo $\pi = 4 - 2.s'$ doppia somma dei quadrati lineari delle corde non maggiori del lato del quadrato iscritto; i numeri π, $2.s'$ sono rispettivamente complementi a 4, ed ambedue irrazionali; poichè essendo tale π lo sarà anche il suo complemento $4 - \pi = 2.s'$.

297. (Fig. 89ª) **L'area** A **racchiusa entro due circoli secanti** c, c' **di ugual raggio è** $A = 2\ (ab \times cc' + s') + s$, **essendo** ab **corda comune ai circoli,** cc' **distanza dei centri,** s' **somma dei prodotti lineari delle completanti l'arco** bgd **sotteso dalla corda** bd = cc' ed s **somma di uguali prodotti lineari delle coppie di completanti l'arco** anb.

Infatti osservarndo la figura si vede che l'area A si forma del rettangolo *a''fda'* più quattro segmenti circolari di corda *bd*, più due segmenti circolari di corda *ab*: ma per essere angolo *fbc'* = *bdc* il quadrilatero *c'bdc* è un parallelogramma, ossia *bd* = *bf* = *cc'* distanza dei centri. I quattro segmenti circolari presi due a due formano due lenticolari ciascuna di area *s'* costituita come è detto, ed inoltre segmento *a'dm'* + *a''fn'* = *ambn* lenticolare di area *s* come è detto: sostituendo e sommando le dette quantità, trovasi $A = 2\ (ab \times cc' + s') + s$.

2. **La stessa area è** $A = (2.cc' + \pi) - 2.z$ **essendo** cc' **distanza dei centri,** z **somma degli infiniti quadrati lineari delle corde non maggiori della complementare** bg **alla** bn **completante media dell'arco** anb **sotteso dalla corda** ab **comune ai circoli.**

Infatti la figura mistilinea *egm'g'e'n'* si forma del circolo $c = \pi$ e della lista *g'ngen'e'*=*ee'g'g*=2.*cc'* per essere 2 il diametro; ma figura *egm'g'e'n'* — $A = 2.grbr'e = 2.z$, e però $A = (2.cc' + \pi) - 2.z$.

3. **La stessa area è anche** A=y—4.z **essendo** y **la somma degli infiniti prodotti lineari delle completanti l'arco** ag'a'm'dgb **supplementare di quello** anb **sotteso dalla corda** ab **comune ai circoli, e** z **è somma dei quadrati lineari delle infinite corde non maggiori di quella** bg, **come sopra è detto.**

Infatti: la somma y dei prodotti lineari dei lati degli angoli della serie acutangola iscritti nell'arco $ag'm'gb$, ossia delle coppie di completanti questo arco, costituisce l'area della mistilinea $egm'g'e'n'$ più quattro volte il triangolo mistilineo $egrbr'=z$, e però $egm'g'e'n'—4.z=y—4.z=A$.

298. Diamo un esempio di applicazione pratica del metodo sommatorio alla misura dell'area del circolo e delle altre coniche.

Dicemmo che il valore dell'area del circolo è espresso dal numero π il quale è somma degli infiniti prodotti lineari dei lati dei triangoli di una serie rettangola iscritta nella semicirconferenza.

Ciascuno di detti prodotti lineari è una corda del circolo che come linea del secondo stato geometrico, può considerarsi quale lista sottilissima avente forma di trapezio.

Il numero delle corde o liste costituenti per somma quello π è infinito ed esprimendolo limitatamente con m, quanto maggiori saranno le unità contenute in m, tanto più la somma delle m corde o trapezi si avvicinerà al giusto valore di π, il quale è perciò numero indefinito. Inoltre π è anche irrazionale come somma dei prodotti dei lati di triangoli rettangoli, i quali come sappiamo per essere valori radicali sono espressi da numeri irrazionali.

Consequechè π potrà esprimersi numericamente come fece Vallis sotto forma di prodotto d'infiniti fattori, o sotto forma di frazione continua quale lo rappresentò

Brounker ovvero anche sotto forma di serie infinita come lo presentò Leibniz, ma sempre in modo indefinito. *La sola geometria sotto forma dell'area del circolo, o anche sotto forma di corda nel circolo, ci presenta finito il numero irrazionale* π. Ciò premesso:

Suppongasi il raggio unitario diviso in 100 parti uguali e però il diametro in 200 ed il doppio diametro in 400 parti uguali, e sia prestabilito di rappresentare con numeri a 5 decimali in parti di raggio 1 i valori radicali dei lati dei triangoli rettangoli dalla serie iscritta nella semicirconferenza.

Delle 400 parti uguali nelle quali è diviso il doppio diametro 4, le prime 200 sommate a due a tre a *n*, si considerino come altrettanti quadrati lineari, per modo che il doppio diametro resta così diviso in 200 coppie di quadrati lineari espressi in parti decimali del raggio 1, dei quali la somma di ciascuna coppia è 4; le radici dei segmenti di ciascuna coppia sono lati di un triangolo rettangolo iscritto nel semicircolo di raggio 1. Avremo infatti

$$\sqrt{0{,}01}^2+\sqrt{3{,}99}^2=\sqrt{0{,}02}^2+\sqrt{3{,}98}^2=\ldots\sqrt{2{,}00}^2+\sqrt{2{,}00}^2=4.$$

In virtù del più volte dimostrato le corde perpendicolari abbassate dai vertici dei 200 triangoli rettangoli così costruiti sul diametro, loro base comune, dividono il raggio in 200 parti uguali. Fra queste corde, ossia prodotti dei lati, il massimo è quello $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ diametro, per modo che l'area del semicircolo resta così formata di 200 liste irregolari o trapezi aventi tutti la stessa generatrice ossia altezza 0,005.

Affichè anche il residuale semicircolo resti in ugual modo diviso, esclusione fatta del diametro $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ dovranno ripetersi gli altri 199 prodotti lineari inversa-

Lati dei trian. rettangoli	Prodotti
$\sqrt{0,01} \times \sqrt{3,99} =$	0, 1997500000
$\sqrt{0,02} \times \sqrt{3,98} =$	0, 2821313858
$\sqrt{0,03} \times \sqrt{3,97} =$	0, 3451191929
» » »	» »
» » »	» »
$\sqrt{2,00} \times \sqrt{2,00} =$	2, 0000000000
Somma S	= 315. 1224537173
id. S'	= 313. 1224537173
$S + S'$	= 628. 2449074346
$\pi = \frac{S + S'}{200}$	= 3, 141224537173

mente disposti; così l'intera area del circolo resta formata di 399 trapezi di uguale altezza, dei quali la somma dà per approssimazione il valore π dell'area del circolo.

Il calcolo si dispone come sopra. Fatta la somma s dei prodotti a partire da quello $\sqrt{0,01} \times \sqrt{3,99}$ a quello $\sqrt{2,} \times \sqrt{2,}$ ossia diametro, trovasi s=315,1224537173. Sottraendo il diametro 2 trovasi s'=313,1224537173; e sommando s+s'=628,2449074346, si divide per 100, tante essendo le parti nelle quali si è diviso il raggio, ed avremo il valore approssimato dell'area del circolo in rapporto al quadrato del raggio; dividendo ancora per 2 troveremo con approssimazione a tre decimali π = 3,141 area del circolo e rapporto della circonferenza al diametro. Quando vogliasi maggiore approssimazione si divida il raggio in un numero maggiore di 100 posti uguali, facendo r=1000 ovvero r=10000 ecc. e si esprimano i lati di triangoli rettangoli della serie con numeri aventi più di 5 decimali; nel resto si operi come è descritto.

299. Il circolo è una ellisse nella quale i fochi coincidono nel centro, il diametro è il parametro, i raggi vettori si sovrapongono formando il raggio del circolo, le assi sono fra loro uguali.

È noto che nella ellisse le ordinate riferite ad un suo asse, sono proporzionali a quelle di uguali ascisse nel circolo descritto su quell'asse come diametro, nello stesso rapporto che passa tra le due assi dell'ellisse.

(Fig. 90ª) Si elevino quante vogliansi ordinate prolunlungate cg, mt, pq . . . al diametro ad di un circolo c. Sulla direzione della ordinata cb passante per il centro si determinino i segmenti arbitrari ce, ch, cg . . . , sulle direzioni delle altre ordinate mm', po si determinino dei segmenti che siano rispettivamente con esse nei rapporti $\frac{ce}{cb}$ » $\frac{ch}{cb}$ » $\frac{cg}{cb}$ . . . . e per i punti così determinati a, s, r, e . . . . d » » a, z, o', h . . . . d » a, q, t, g . . . . d . . . . fatte passare delle curve continue, queste risulteranno altrettante semi ellissi aventi un asse comune ad e formanti una serie della quale il semicircolo di diametro ad è *fondamentale.*

L'area π del circolo essendo somma di tutte le doppie ordinate al diametro ad, quella a di una ellisse della serie di asse minore $2\,ce$, è data evidentemente dalla proporzione $a : \pi :: (cd=1) : ce$ onde $a = \frac{\pi}{ce}$. In uguale modo per l'area a_1 di un ellisse $aqtg$ . . . . di asse maggiore $2.cg$ ed asse minore ad, avremo $a_1 = \frac{\pi}{cg}$ ecc.

Sono in tal modo quadrabili con l'approssimazione π dell'area del circolo, non solo le ellissi della serie all'infinito, ma anche le lunole formate dalla semicirconferenza del circolo fondamentale e dà una semiellisse come $am'bde$,

azhdb, nonchè quelle formate da due semiellissi della serie come *deazh*, *deatg*; i segmenti di lunola ellittica come *rsaom'*, *eram'b*, e conseguentemente le aree delle figure regolari o no che possono decomporsi in ellissi, lunole ellittiche, semilunole e segmenti ellittici.

300. *Nella parabola i quadrati delle ordinate sono in ragione diretta delle ascisse corrispondenti; mentre nel circolo i quadrati delle corde da un estremo del diametro sono in ragione diretta delle rispettive proiezioni su di esso.* In virtù di tale correlazione (Fig. 91ª) sopra quante vogliansi ordinate prolungate del circolo *c* si prendano dei segmenti *po*, *cn'*, *qr*, *ds* rispettivamente uguali alle corrispondenti corde *ae*, *ah*, *an*, *ad*. Avremo

$$ap : \overline{po}^2 :: ac : \overline{cn'}^2 :: \ldots . ad : \overline{ds}^2,$$ *ossia la curva continua che passa per i punti* a, o, n', r, s *è una parabola.* Sulle direzioni delle ordinate della detta parabola si determinino dei segmenti in un rapporto arbitrario facendo *pz* : *pe* :: *cv* : *cn'* :: *dt* : *ds* od anche *pb* : *po* :: *cg* : : *cn'* :: .... *dk* : *ds* e le curve contiuue fatte passare per i punti *a*, *z*, *v*, *m''*, *t* » *a*, *b*, *g*, *h'*, *k* sono altrettante parabole costituenti insieme una serie della quale il circolo fondamentale è quello di raggio *ca*.

Nella serie la parabola *dan'rs*, la quale ha per ordinate le corde corrispondenti del circolo fondamentale, diremo *equilatera* e *generatrice della serie.*

L'area del segmento sn'an''s' *della parabola equilatera, in conseguenza della descritta costruzione, si vede che è somma* A *delle infinite corde che dall'estremo di un diametro si possono tracciare nel circolo fondamentale, e però si calcola sommando i valori in parti di raggio* 1 *dei lati degli* m *triangoli di una serie rettangola iscritta nel semicircolo.* Ci avvicineremo sempre più

al giusto valore dell'area A, quanto maggiori sono le unità costituenti *m*.

Le aree delle parabole della stessa serie evidentemente stanno fra loro come le rispettive ordinate corrispondenti ossia di uguali ascisse, e però per l'area A_1 del segmento parabolico *tvav't'* faremo $A : A_1 :: cn' : cv$, ossia $A_1 = \frac{A.cv}{cn'}$, e per il segmento parabolico *kgag'k'* avremo $A_{11} = \frac{A.cg}{cn'}$.

In modo analogo si calcola per approssimazione e per differenza l'area di uno spicchio parabolico *kgan's*, di un triangolo mistilineo del quale un lato sia circolare e l'altro parabolico come *dhan's*, di un frammento come *vv'xm*, *gg'x'h'*, ed in genere delle figure regolari o no che possono decomporsi in segmenti spicchi e frammenti parabolici.

301. (Fig. 92ª) Il diametro *ab* del circolo *c* iscritto nel quadrato sia l'asse primo di una iperbola rettangola. Per costruire la curva si divida il semiasse primo, ossia raggio *ca*, in un numero arbitrario di parti uguali *co*.

A partire dal vertice *a* si portino successivamente in 1, 2, 3 .... *n* segmenti uguali a *co*, e si elevino le perpendicolari indefinite all'asse prolungato *ab*. Col centro successivamente nei punti *o*, *a*, 1, 2, 3 .... *n* e raggi crescenti *ob*, *ab*, 1*b*, 2*b* ... si taglino in *s*, *s'* » *n*, *n'* » *m*, *m'* » » *p*, *p'* » .... le perpendicolari successive. Per i punti *p*, *m*, *n*, *s*, *a*, *s'*, *n'*, *m'*, *p'* fatta passare la curva continua questa sarà l'iperbola rettangola, inquantochè essa ha gli assintoti *cd*, *ce* scambievolmente perpendicolari.

Infatti, nel circolo di raggio *ob* abbiamo $1b \times 12 =$

$= 1b \times 1a = \overline{1s}^2$, ; nel circolo di raggio ab abbiamo $2b \times 24 = 2b \times 2a = \overline{2n}^2$ ecc.

Si taglino nello stesso rapporto arbitrario le ordinate successive prolungate ove occorra, della iperbola rettangola, facendo $1r : 1s :: 2v : 2n :: 3x : 3m :: \ldots$ e simmetricamente all'asse si riportino in r', v', x', f' i punti r, v, x, f, e la curva continua $frav'f'$ è una iperbola della serie nella quale il circolo c è fondamentale, il suo diametro ab asse primo comune, e l' iperbola rettangola $pnan'p'$ generatrice della serie; qualsiasi altra curva $kqaq'k'$ costruita in egual modo ma con ordinate che siano in un diverso rapporto di quella della descritta con quelle corrispondenti alla rettangola, è pure iperbola della serie.

Il raggio ca del circolo fondamentale suppongasi diviso in 100, 1000, 10ª parti, e come dicemmo per le altre coniche, l'area A di un segmento $pnan'p'$ della iperbola rettangola è data dalla somma delle doppie ordinate alla curva. Avremo cioè:

$$A = 2\left(\sqrt{1a \times 1b} + \sqrt{2a \times 2b} + \ldots \sqrt{na \times nb} + \ldots\right).$$

L'area A_1 di un segmento di altra iperbola della serie sta a quella A del corrispondente nella iperbola rettangola nel rapporto delle rispettive ordinate riferite alla ascisse comuni; talchè se A_1 e l'area del segmento iperbolico $fvav'f'$, ed A_{11} e l'area del segmento iperbolico $kqaq'k'$ avremo:

$$A_1 : A_{11} :: 1r : 1s \text{ ossia } A_1 = \frac{A \times 1r}{1s} \text{ e } A_{11} = \frac{A \times 1z}{1s} \text{ ecc.}$$

Come si disse per la parabola, si possono calcolare per differenza e con approssimazione le aree dei triangoli mistilinei aventi per lati un arco circolare ed altro iper-

bolico come *4gamp*, ovvero aventi per lati archi iperbolici come *fvanp*, o segmenti come *qkk'q'*, *vfpm*, e conseguentemente di tutte quelle figure regolari o no che possono decomporsi in triangoli o segmenti iperbolici.

302. Riteniamo di aver provato a sufficenza che nelle sue applicazioni la geometria può estendersi molto più di quanto oggi si ritiene. Sono incalcolabili i vantaggi che potrebbero trarre le arti e le industrie da questa scenza, qualora si volesse modificarne l'insegnamento segnatamente nei corsi tecnici. Ci riterremo ben fortunati se a raggiungere tal fine, alla nostra debole voce si unirà quella di coloro i quali assai più di noi competenti, possono trovare ascolto presso chi presiede al pubblico insegnamento.

PARTE QUARTA

Esercitazioni topografiche

Dimostrammo come la causa prima degli errori che frequentemente si verificano nel rilevare un terreno, può attribuirsi alla eventuale imperfezione della graduazione dei goniometri usati (23,25), nonchè alla impossibilità di potere riprodurre in disegno con rigorosa esattezza la maggior parte degli angoli rilevati.

Suggerimmo di sostituire alla attuale graduazione del circolo in 360° quella per archi 3° e loro duennesimi (25), la quale può costruirsi rigorosamente esatta, mentre anche tutti i suoi angoli sono esattamente riproducibili mediante la riga ed il compasso.

Quando tale sostituzione non sia possibile, per evitare errori, alla graduazione per 360° l'operatore dovrebbe preferire i molti mezzi che offre la geometria per misurare o costruire gli angoli senza ricorrere alla divisione della circonferenza per gradi e decimi di grado.

Nelle esercitazioni che seguono, abbiano supposto che l'operatore si serva della catena agrimensoria e della *falsa squadra* sia ad intraguardi sia a canocchiale.

La *falsa squadra* si forma di un disco metallico girante sopra un sostegno. Nel centro del disco, con rigorosa esattezza s' intersecano due linee tra loro perpendicolari e le bisettrici dei quattro retti che esse formano.

Una delle linee di mira è fissa al disco e collima con una delle dette perpendicolari segnata 0,° 180°, l'altra sovraposta è esattamente girante nel centro del disco.

Per questa disposizione girando il disco sul quale le due linee di mira segnino un angolo al centro, questo può riprodursi sul piano rigorosamente esatto sotto diverse orientazioni.

Altri, più di noi competenti, ci hanno preceduto nel dare metodi per misurare o costruire gli angoli sia con la catena agrimenso-

ria sia con la *falsa squadra*, e nella soluzione dei problemi ci siamo talvolta prevalsi dei mezzi da essi indicati.

Supponiamo che i nostri lettori siano esperti nella agrimensura, e però salvo poche eccezioni, ci siamo limitati alla misura delle distanze e dei perimetri ed aree di figure inaccessibili all'operatore.

Esercitazione I. — *Costruzione, misura e decomposizione in duennesimi degli angoli mediante la catena agrimensoria ed operazioni varie tra i valori angolari.*

(Fig. 93ª) 1. *Costruire i quattro angoli primari* 360° » 120° » 72° » » 24° (3).

È nota la costruzione, mediante la catena agrimensoria dell'angolo retto e però costruiremo ang. 360° facendo $4 \times 90° = 360°$. Si sa ugualmente costruire l'angolo 60°, perimetrale del triangolo equilatero, quindi faremo ang. $120° = 2 \times 60°$.

Per costruire ang. $72° = \frac{360°}{5}$ (Fig. 93ª) nel triangolo rettangolo *cad* sia $ad = \frac{ac}{2}$, $de = da$, $cm = ce$. Nel punto medio *o* del segmento *ma* si elevi la perpendicolare *ob*, con centro *a* e lunghezza $ab = cm$, si tagli la perpendicolare in *b*, e tracciata la *bc* risulta *ca*, considerato come raggio, diviso in *m* in media ed estrema ragione; quindi $ca : (cm = ab) :: ab : am$; ma per la perpendicolare *ob* sulla metà della base *ma*, il triangolo *mba* è isoscele e simile a quello *acb* che è però anche esso isoscele. Consegue che nel circolo di raggio *ca* è *ab* lato del decagono regolare iscritto, quindi angolo $acb = \frac{360°}{10} = 36°$, ang. $cab = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$.

Per costruire angolo 24° si formi l'equilatero *bcg* avremo angolo $acg = bcg - bca = 60° - 36° = 24°$.

2. *Decomporre in duennesimi un angolo dato per direzioni dei lati.*

Dovrà bisecarsi successivamente il dato angolo (2.*a*)

Con la catena agrimensoria sappiamo bisecare un angolo mediante le intersezioni delle perpendicolari elevate ai lati in punti equidistanti dal vertice, ovvero anche per intersezioni di segmenti uguali assunti come raggi, da centri presi sui lati equidistanti dal vertice; ma per una serie duennesima decrescente di angoli che in breve divengono piccolissimi, i detti due modi danno luogo facilmente ad inesattezze. Esponiamo però un modo per bisecare l'angolo mediante la misura lineare.

(Fig. 94ª) Vogliansi i duennesimi dell'angolo *acb*.

Per un punto *m* di un suo lato *ac* si tracci l' allineamento *ah* parallelo all'altro lato *cb*, e su questo allineamento si faccia $mf = mc$ » $fg = fc$ » $gh = gc$ e così proseguasi.

Per i triangoli isosceli *fmc*, *gfc*, *hgc* .... e per le parallele *cb*, *mh* avremo ang. $mcf = mfc = fcb$; ossia ang. $fcb = \frac{acb}{2}$; angolo $fcg = fgc = gcb$ ossia ang. $gcb = \frac{fcb}{2} = \frac{acb}{4}$; ang. $gch = ghc = hcb$, ossia ang. $hcb = \frac{gcb}{2} = \frac{fcb}{4} = \frac{acb}{8}$ ecc.

3. *Misurare dal vertice gli angoli siano essi interi frazionari o fratti, costruibili o no.*

Un angolo costruibile formandosi delle possibili combinazioni tra i duennesimi dei quattro angoli primari (6), è sempre misurabile con la catena agrimensoria o fettuccia metrica, poichè possiamo costruire con queste tanto gli angoli primari che i loro duennesimi.

Sia dato un ang *a* per direzione dei lati, si sottraggano da esso tutti gli ang. primari e duennesimi di questi che è capace di contenere, e l'angolo residuale si raddoppi successivamente, ne resterà formato uno degli angoli primari se quello dato *a* è costruibile (6). Se così operando non ne resti formato un angolo primario, ciò indica che l'angolo *a* non è costruibile con la riga ed il compasso, ed in tal caso potrà essere determinabile o no (17).

Quando sia determinabile è anche terza parte di altro angolo costruibile (18) e perciò il suo angolo triplo sarà angolo primario o composto di duennesimi di angoli primari. Ad esempio. Si trovi $a = 90^0 + \frac{90^0}{8} +$ ang. z, e duplicando z 5 volte ne resti formato ang. $\frac{72^0}{2} = 36^0$; avremo ang. $a = 90^o + \frac{90^o}{8} + \left(\frac{36^o}{2^5} = \frac{36^o}{32}\right) = 90^o + 11^o.25 + 1^o.125 = 102^o.375$. Accada invece che duplicando successivamente ang. z, si superi arco 120° senza incontrare angoli primari o loro duennesimi, allora si formi ang. $3.z$ che essendo costruibile si decompone in duennesimi di angoli primari come si è detto. Così ad ipotesi togliendo dall'angolo $3\,z$ ang. $\frac{24^o}{4} = 6^o$ resti un angolo piccolissimo z', e questo duplicato quattro volte successive riproduca l'ang. 6^0, ne dedurremo ang. $3.z = 6^0 + \frac{24^0}{64} = 6^o.375$ da cui $z = \frac{6^0,375}{3} = 2^o,125$, quindi ang. $a = 90^o + 11^o,25 + 2^o,125 = 103^o,375$, esatta misura di angolo *determinabile* che però non può riprodursi mediante la riga ed il compasso; per renderlo costruibile dovrà ridursi tale come esponemmo al (21).

Suppongasi che quando come sopra nella misura dell'ang. a si trovi ang. $3.z$ non costruibile; ciò indica che il resto ang. z è indeterminabile, e rinvenuto che ang. $3.z$ supera di quantità trascurabile quello $6^0,375$, come esponemmo al (21), per misura dell'ang. a si adotti quello dell'angolo costruibile che più si approssima per eccesso all'ang. $103^o,375$; ovvero trovato $3.z$ inferiore di quantità piccolissima all'ang. $6^o,375$, si adotterà l'angolo costruibile che più si approssima per difetto all'ang. $103^o,375$.

L'esposto modo di misura degli angoli mediante la catena agrimensoria o la fettuccia metrica è geometricamente esatto, però richiede nell'operatore grande pratica e precisione.

4. *Riprodurre sul terreno o in disegno gli angoli rilevati o dei quali sia dato il valore in gradi e duennesimi di grado.*

La riproduzione di angoli rilevati si effettua ripetendo inversamente le stesse operazioni eseguite per misurarli. Così, ripresi i

precedenti esempi, si riproduce angolo a sommando $90^\circ + \frac{90^\circ}{8} + \frac{36^\circ}{32}$ ossia costruendo in successione l'angolo retto, il risultato di tre bisezioni di questo è quello di 5 bisezioni dell'ang. 36°. Si costruisce il determinabile ang. 103°,375, sostituendo alla sua parte non costruibile 2°,125, un angolo costruibile che ne differisca per eccesso o difetto di quantità trascurabile e ciò come è detto al (21), operando nel resto nel descritto modo. Se l'angolo da costruirsi è dato per gradi e duennesimi, si ricerca nella tavola (3) quei duennesimi di angoli primari i quali combinati per somma, differenza, prodotto o quoto riproducono il valore angolare dato, quindi si riproducono ordinatamente e successivamente gli stessi duennesimi per formarne l'angolo. Deve però osservarsi che lo stesso angolo può comporsi di diverse combinazioni tra duennesimi di archi primari, in tal caso si presceglie quella che sia più facile eseguire o graficamente o sul terreno.

Finalmente se il valore angolare dato è indeterminabile, si rende determinabile sommando con la prima sua cifra a destra le unità necessarie a renderlo multiplo di 3 e terminante per le cifre 0°,5 » 0°,..25 » 0°,..75 e si opera nel resto come si è detto. Ad esempio voglia costruirsi ang. 103°,372, scriveremo 103°,375 che è determinabile e sommando con esso ang. $0^\circ,03125 = \frac{1^\circ}{32}$ diverrà angolo costruibile 103°,40625; lo decomporremo negli angoli $90^\circ + \left(12^\circ = \frac{24^\circ}{2}\right) + 1^\circ,40625$; ridurremo quest'ultimo al suo angolo base facendo $1^\circ,40625 \times (2^5 = 32) = 45^\circ$, e finalmente costruiremo con grande approssimazione il richiesto 103°,372, sommando il retto con la metà dell'angolo 24° ed il risultato di 5 bisezioni del semiretto.

Quando poi si vogliano costruire con rigorosa esattezza angoli determinabili o indeterminabili, necessita fornirsi di catene costruite come è indicato al (27) per quindi operare come è detto al (26).

5. *Eseguire sul terreno o in disegno volute operazioni tra dati valori angolari.*

Le operazioni fra gli angoli si eseguiscono numericamente tra

i loro valori, e quindi si costruisce sul terreno o in disegno l'angolo dato dal risultato dell'operazione numerica.

Riteniamo sufficenti due esempi per norma degli esercenti.

1. Si richieda $\frac{1}{7}$ del quintuplo di un angolo a dato per direzioni dei lati.

Misurato come sopra risulti ang. $a = 5^0,25$.

Faremo $\frac{5^0,25 \times 5}{7} = 3^0,75 = \frac{15^0}{2^2}$ che si costruisce con due bisezioni dell'angolo $15 = \frac{60^0}{4}$.

2. Domandasi una serie crescente di angoli interi della quale sia primo termine ang. 3^0 e somma dei termini la circonferenza.

La somma dei primi n numeri naturali è $s = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, e $2.s = n^2+n$ (A). I numeri stanno agli angoli corrispondenti come 1 : 3; somma assegnata della serie angolare è la circonferenza 360^0: quindi $3.s = 360^0$, $s = \frac{360^0}{3} = 120^0$, che sostituito nella formula (A) dà $2 \times 120 = n^2+n$, da cui $n = 240 - n^2$; però si tolga dal 240 il maggior quadrato intero del quale è capace, cioè $240 - (2.25 = \overline{15}^2) = 15$, e questo sarà il numero n dei termini dei numeri che in ordine naturale danno per somma 120. Triplicando i primi 15 numeri in serie naturale ne ricaveremo quello dei quindici angoli 3^0, 6^0, 9^0, 12^0 . . . . 45^0 dei quali la somma è 360^0.

Es. II. — *Con la catena agrimensoria misurati per caminamento* n *lati di una poligonale, verificare se siasi errata la misura degli* n—1 *angoli precedenti.*

Dal principio (95) risulta che la somma s degli angoli di una poligonale di n lati è $s = n \times 180^0 - q + q'$, essendo q, q' gli angoli che formano due parallele con i lati estremi della poligonale.

(Fig. 20ª) Sia b origine della poligonale $bcef$... h, si formi con l'allineamento ba l'ang. abc arbitrario. Da un punto a dell'allineamento ba

sia visibile un vertice h della poligonale. Si ponga un segnale in a e si misurino gli angoli $hab=p$ » $abc=q$: giunti con la misurazione in h, con la direzione ha si faccia ang. $ahi=p$, e si misuri angolo $ghi=q'$. Essendo n i segmenti già misurati della spezzata, la somma dei suoi $n-1$ angoli pure misurati sarà $s=n\times180^0-q+q'$. Se ciò non si verifica la loro misura è errata e dovrà ripetersi inversamente finchè non siasi rinvenuto e corretto l'errore.

2. La poligonale sia nel sottosuolo o in terreno coperto, allora si misuri l'angolo $abc=q$ che la direzione dell'ago magnetico forma in b col primo lato bc della poligonale, e giunti in h si misuri l'angolo $ghi=q'$ che l'ago magnetico fa col lato hg. Avremo come sopra $s=n\times180^0-q+q'$.

3. Sia h origine della poligonale situata in terreno soleggiato, e dal punto h non sia visibile alcuno dei suoi vertici.

Si collochi in h una palina verticale e si misuri l'angolo $ghi=q$ che l'ombra proiettata dalla palina sul suolo forma col lato hg, contemporaneamente si osservi sul cronometro per minuti primi l'ora k. Giunti in b si collochi una seconda palina verticale e si misuri l'angolo $mbc=q'$ che l'ombra di questa forma col lato bc e si osservi l'ora k'.

Le direzioni hi, bm delle ombre delle paline non possono essere parallele a causa del tempo $k'-k$ impiegato nella misurazione e per il moto solare apparente. Suppongasi tracciata la ba parallela alla hi, l'ang. abm che misura l'inclinazione scambievole delle direzioni delle ombre hi, bm è espresso in tempo dall'ora $k'-k$. Dovrà perciò ridursi questa misura in gradi e decimali. Il giorno essendo diviso in ventiquattro ore, l'angolo che l'ombre di un gnomone formano tra loro dal principio alla fine di ora $1=60'$ è $z=\frac{360^0}{24}=15^0$.

Si risolva la proporzione $60' : 15^0 :: k'-k$: ang. abm, nella quale sia ad ipotesi $k=$ ore 8, e $k'=$ ore 8.45, ed avremo angolo $abm=$ $=0,\frac{45'\times15^0}{60}=$ ang. $11^0,25$, e perciò angolo $abc=abm+mbc=$ $=11^0,25+mbc=q'$ (1), da cui come ai precedenti $s=n\times180^0-q+q'$.

(1) Vedi Parte IV - Cronogoniometria.

4. Non si disponga nè dell'ago magnetico nè del cronometro. Allora misurato all'origine l'angolo $abc = q$, i valori rispettivi agli angoli successivi della poligonale dovrà essere in ciascuno decomposto in due parti, delle quali la prima è supplemento della seconda dell'angolo precedente; faremo cioè ang. $abc = q$ » ang. $c = (180^0 - abc) + r$ » ang. $e = (180^0 - r) + s$ » ang. $f = (180^0 - s) + t$ » ang. $g = (180^0 - t) + z$. Giunti in h formeremo con l'allineamento hi angolo $ghi = q' = 180^0 - z$. Per questa costruzione non necessita dimostrare che le ba, hi risultano parallele, e come ai precedenti avremo $s = n \times 180^0 - q + q'$.

Es. III. — *Ad un segmento inaccessibile; tracciare delle parallele da punti dati o arbitrari; da punti dati abbassare delle perpendicolari ad esso, ovvero abbassare la perpendicolare al suo estremo, sulla metà o in altro punto visibile dell'allineamento. Tracciare degli allineamenti che formino angoli voluti con quello inaccessibile. Misurare quest'allineamento o dividerlo mediante direzioni in parti eguali o proporzionali. Compire le stesse operazioni se dal punto assegnato l'allineamento oltre essere inaccessibile sia anche invisibile.*

(Fig. 95ª) Siano ma, mb direzioni da un punto arbitrario o assegnato m a due punti visibili a, b dell'allineamento inaccessibile. Si raccolgano in p, q le proiezioni dei punti a, b; si faccia $mq' = mq$ ed $mp' = mp$, e si tracci prolungata la $p'q'$ che risulterà parallela al segmento inaccessibile ab.

Infatti triangolo $p'mq' = pmq$, e poichè il triangolo pmq è simile al triang. omb (55) consegue che per la inversione la $p'q'$ risulterà parallela alla ab.

Siano g, h proiezioni degli estremi a, b del segmento inaccessibile sulla parallela ad esso df, e risulterà $gh = ab$.

Siano a, b estremi dell'allineamento inaccessibile, evidentemente le perpendicolari ga. hb elevate alla df parallela alla ab nei punti di proiezione g, h, cadono perpendicolari alla ab nei suoi estremi

Sia r punto medio del segmento $gh=ab$, e la perpendicolare rs cade sulla metà di ab; ovvero r' divida il segmento $gh = ab$ in modo che abbiasi $gr' : rh :: m : n$, e la perpendicolare $r'e'$ incontra la ab per modo che $ae' : e'b :: m : n$.

Sia m un punto assegnato del piano, le perpendicolari alle ma, mb nelle proiezioni su di esse p, q dei punti a, b s' incontrano in un punto o, il quale è ortocentro del triangolo amb, e perciò la mo risulta perpendicolare alla ab per il punto assegnato m.

Se l'ang. $fq'b$ è uguale ad un voluto angolo z, evidentemente l'angolo $abq' = z$ per essere alterni interni gli angoli $fq'b$, abq': se l'angolo pmo è uguale ad un voluto angolo $90^0 - z$ sarà angolo $abm = z$. poichè nel triangolo rettangolo $be'm$ gli angoli acuti sono complementari.

Se le direzioni dal punto dato del piano a due punti visibili dell'allineamento formano fra loro un angolo ottuso aob, gli stessi quesiti si risolgono in modo analogo, raccogliendo cioè le proiezioni $p.q$ dei punti a, b sui prolungamenti delle oa, ob.

Se le direzioni oa, ob formano fra loro angolo retto, allora le proiezioni su di esse dei punti a, b s' incontrano nel dato punto o nè può operarsi come si è detto, e perciò dovrà tracciarsi una direzione ob' ad altro punto visibile dell'allineamento ab per operare mediante l'angolo acuto, ovvero ottuso così formato, nel già descritto modo.

Per risolvere gli stessi quesiti mediante *la falsa squadra* da un punto dato o arbitrario m, si prenda l'apertura dell'angolo amb che formano le direzioni ai due punti a, b dell'allineamento inaccessibile, ed elevata in m la perpendicolare mh alla ma, si percorra conservando l'apertura alla falsa squadra, finchè trovasi un punto h che dia ang. $ahb = amb$, ed allora la direzione hb cade perpendicolare in b all'allineamento ab. Infatti i triangoli amb, ahb di ugual base ed angolo al vertice sono iscrittibili nello stesso segmento circolare, e perciò il punto h si trova sulla circonferenza circoscritta ai due triangoli; ma le perpendicolari mh, bh agli estremi dei lati di un angolo di un triangolo s'incontrano sulla circonferenza circoscritta ad esso (39), poichè mh è perpendicolare al

lato *ma* ed il punto *h* trovasi sulla circonferenza, anche *hb* sarà perpendicolare al lato *ab* nel suo estremo. Tracciata per *h* la *hd* perpendicolare alla *hb* risulterà parallela alle *ab* e raccolta su di essa le proiezione *g* del punto *a*, si opera nel resto come si è detto per la soluzione dei vari quesiti.

Quando con la falsa squadra si vuole abbassare direttamente la perpendicolare sulla metà del segmento inaccessibile ab (Fig. 96ª); da un punto arbitrario *m*, si bisechi con la *mg* l'angolo *amb* formato dalle direzioni ai due punti visibili *a*, *b* dell'allineamento; ed elevata la *mh* perpendicolare alla *mg*, si percorra finchè trovasi un punto *h* che dia ang. *ahb* = *amb*; la bisettrice *hg'* dell'angolo *ahb* cadrà perpendicolarmente sulla metà del segmento *ab*

Infatti, iscritti idealmente i triangoli *ahb*,*amb*, di egual base ed angolo al vertice, le loro bisettrici ai vertici devono incontrarsi nel punto medio *d* dell'arco *adb* sotteso dalla base comune *ab*: ma il triang. rettang. *dmh* è pure iscritto nella stessa circonferenza della quale perciò l'ipotenusa *dh* è il diametro, e poichè questo ha un estremo nel punto medio *d* dell'arco *adb*, è perpendicolare alla sua corda *ab* e la divide per metà in *r*.

Finalmente quando (Fig. 97ª) *per un dato punto* f (*dal quale oltre essere inaccessibile è anche invisibile un allineamento* mn) *si voglia tracciare una parallela, abbassare la perpendicolare o tracciare altro allineamento che formi un voluto angolo con quello invisibile*; per il dato punto *f*, si tracci un allineamento *fe* arbitrario per lunghezza e direzione, marcando il suo punto estremo *e*, e si percorra tra gli ostacoli una linea spezzata qualunque *eda* della quale senza segnare o misurare i segmenti, si annota il valore degli angoli successivi dalla stessa parte del segmento inaccessibile *mn*; e ciò finchè si raggiunga un punto *a* dal quale sia visibile il segmento *mn* e che si trovi sul suo prolungamento. Si misuri l'angolo *dab* = *q'* che l'ultimo segmento della spezzata *fa* con la direzione *mn*, ed allora per quanto si e detto al (95), se *n* è il numero degli angoli, compreso quello *q'* ed *s* la loro somma, si formi in *f*, coll'allineamento *fe*, un angolo *efh* = *q* = 180° *n* — *s*, e la direzione *fh* risulterà parallela al segmento inaccessibile *mn*.

Una perpendicolare qualunque alla fh, parallela ad mn, risulterà anche perpendicolare a questo allineamento; e qualsiasi allineamento fe il quale formi con la fh un voluto angolo z, forma in senso inverso lo stesso angolo col segmento inaccessibile mn o col suo prolungamento.

Es. IV. — *Dato sul terreno un triangolo in parte o del tutto inaccessibile, determinare alcuni dei suoi punti notevoli* (31) *mediante la falsa squadra.*

1. *Domandasi il centro del triangolo* ahb *del quale è accessibile la base* ab (Fig. 98ª A).

Negli estremi $a.b$ si elevino le perpendicolari ai lati ad incontrarsi in d. Il punto d è sulla circonferenza circoscritta al triangolo ahb ed il suo centro sarà l'incontro c delle perpendicolari elevate alle bd, ad nei loro punti medi m, n, ovvero l'incontro c della direzione dh con una delle dette perpendicolari.

2. (Fig. 98ª B) *Nello stesso triangolo determinare centro, ortocentro, incentro, baricentro ed excentro corrispondente al lato accessibile* ab.

Nel triang. ahb avremo ang. $h = 180° - a + b$.

Si formino con la base ai suoi estremi ang. $bac = abc = 90° - h$ e come dal (41) risulterà c centro del triangolo.

In a, b si formino coi lati ang. $hao = hbo = 90° - h$ e come dal (46) sarà o ortocentro del triangolo.

Evidentemente le bisettrici degli angoli a, b alla base dànno l'incentro i del triangolo.

Sia m punto medio della base ab, e p proiezione su di essa del vertice h, si faccia segmento $mr = \frac{mp}{3}$, ed elevata alla base la perpendicolare rz ad incontrare la direzione mh in z, sarà z baricentro del triangolo, poichè sappiamo che sulla mediana hm la distanza hz del vertice h al baricentro è $\frac{2.hm}{3}$.

Finalmenle le perpendicolari alle bisettrici ai, bi nei vertici a, b

danno col loro incontro *e* l'excentro relativo al lato *ab* del triangolo *ahb*.

3. *Essendo accessibile un solo vertice determinare il centro del triangolo.*

(Fig. 98ª c) Dal vertice accessibile *b* si tracci parte della perpendicolare *bm* al lato inaccessibile opposto. Si faccia angolo $hbc = abm$, si elevi *bd* perpendicolare alla *bh* e si percorra con l'apertura dell'ang. *dbc* finchè trovasi un punto che dia angolo $hdb = cbd$: l'intersezione *c* delle *dh*, *bc* è il centro.

Infatti, il triangoto *dcb* è per costruzione isoscele, quindi $dc = bc$, ma per l'angolo retto *dbh* l'angolo $dbc = 90^0 - cbh$, e nel triangolo rettangolo *dbh* l'angolo $bdh = dbc = 90^0 - bhc$, quindi $hbc = bhc$, ossia $ch = cb = cd$ sono raggi di un circolo di centro *c* il quale è quello circoscritto al triangolo *ahb*.

4. (Fig. 98ª D) *Determinare il centro del triangolo essendo questo accessibile al solo porta segnale.*

Come all'Es. III si tracci la direzione perpendicolare sulla metà del lato *ab* del triangolo *ahb*, e ad essa si tracci un allineamento perpendicolare indefinito *fg* sul quale si marcano in *f*, *g* le intersezioni delle direzioni *ha*, *hb*; in questi punti si elevino alle dette direzioni ad incontrarsi in *s* le perpendicolari *fs*, *gs*, e si faccia fissare il segnale nell'incontro *c* della *mo* con la direzione *sh*, che sarà il centro del triangolo *ahb*.

Infatti per essere rettangoli, i triangoli *hfs*, *hgs* sono iscrittibili in un circolo del quale l'ipotenusa comune *sh* è diametro. Per essere triang. *ahb* simile a quello *fgh* la *sh* è anche sulla direzione del diametro del circolo circoscritto al triangolo *ahb*; ma in questo triangolo la *mo* perpendicolare nel mezzo del lato *ab* passa per il centro, il quale è di conseguenza l'incontro *c* della *mo* con la direzione *sh* del suo diametro.

5. *Essendo accessibile un vertice* b *del triangolo* bad *determinarne l'ortocentro* (Fig. 99ª).

Si raccolga in *h* la proiezione del vertice *a* e si tracci la *dm* perpendicolare al lato inaccessibile *ba*, evidentemente l'intersezione *o* è l'ortocentro del triangolo.

Qualora sia accessibile la base db, si elevi a questa la perpendicolare hs nel punto h proiezione del vertice a, e si faccia angolo $hds = 90° - dba$, fatto $ho = hs$ sarà o ortocentro.

6. *Essendo invisibili i vertici del triangolo dalle rispettive proiezioni sui lati, determinare queste proiezioni.*

(Fig. 100ª) Dal lato ab sia invisibile il vertice h, si elevino alle direzioni ad, bg dei lati nei vertici a, b le perpendicolari ad incontrarsi in n. Si faccia triang. $amb = anb$, si abbassi per m alla ab la perpendicolare mp raddoppiandola in po, sarà p proiezione del vertice invisibile h sulla ab, e le bo, ao prolungate daranno le proiezioni q, e dei vertici b, a sui lati opposti.

Infatti, il punto n è sulla circonferenza circoscritta al triangolo ahb ed nh è diametro di essa. Per essere triangolo $amb = anb$ anche il punto m trovasi sulla detta circonferenza ed in questa i segmenti $an = bm$ sono corde, e perciò ang. $ahn = bhm$; pertanto nh è diametro, quindi ahn e derivato inverso e bhm derivato diretto del vertice h (45), ossia la mh è perpendicolare alla ab, e p proiezione del vertice h sulla ab. Per essere $po = pn$ sarà o ortocentro del triangolo ahb (48) e perciò le ao, bo cadono perpendicolari sui lati opposti e danno su questi le proiezioni e, q dei vertici a, b.

In altro modo si elevi ad ab la perpendicolare rg ad incontrare la be, alla rg si elevi in g la perpendicolare gf ad incontrare ad, dal punto f si abbassi fr' perpendicolare alle ab e si determini la proiezione p sulla ab del vertice invisibile h facendo $bp = \frac{ab \times br}{ar' + br}$

Infatti, tracciata idealmente la hp, per i triangoli simili avremo $af : ah :: bg : bh$ e $af : ah :: ar' : ap$ » $bg : bh :: br : bp$, quindi $ar' : ap :: br : bp$ e $ar' + br : br :: ap + pb : pb$, da cui $pb = \frac{ab \times br}{ar' + br}$

Es. V. — *Misurare la distanza di punti inaccessibili.*

(Fig. 94ª) Il retto bcs sia decomposto in duennesimi dalle cm, cf, cg.... Possono calcolarsi i segmenti di queste bisettrici successive, compresi tra il vertice c ed una parallela sh al lato cb del

retto, e da queste dedurne le distanze *sm*, *sf*, *sg* .... dei loro estremi dal punto di stazione *s*.

Infatti sia *cs*=1: essendo per ipotesi ang. *scm*=45° sarà *sm*=*sc*=1. Dalla (Eserc. I, 2°) sappiamo che *mf*=*mc*, *gf*=*fc* ... ecc. Nei triangoli rettangoli *msc*, *fsc*, *gsc* abbiamo $sm = 1$, $mc = \sqrt{2}$ » $fs = \sqrt{2} + 1$ » $gs = fc + fs = \sqrt{\sqrt{(2+1)^2 + 1}} + \sqrt{2} + 1$, e così proseguendo se ne formi la tab. M come a lato, nella quale il valore degli angoli successivi è dato dalla somma a due, a tre, a quattro ad *n* dei duennesimi del retto, e però sono facilmente costruibili come è detto alla (Es. I, 4°).

(Tav. M)
Distanze date dalle bisettrici del resto di lato I

ANGOLI	DISTANZE
scm = 45°,0000	*sm* = m.l. 1,0000
scf = 67°,5000	*sf* = » 2,4142
scg = 78°,7500	*sg* = » 5,0273
sch = 84°,3750	*sh* = » 10,1530
sci = 87°,1875	*si* = » 20,5011
» » »	» » » » »

Le distanze metriche in numeri decimali possono moltiplicarsi successivamente per 10 mediante il trasporto a destra della virgola.

a) 1. *Ciò posto dalla stazione* s *e sulla direzione* sm, si voglia fare collocare alla distanza di m.l. 754,65 un segnale *k*.

Moltiplicando per 100 le distanze della tabella M abbiamo 100 *sh* = = m.l. 1015,30, lunghezza alla quale corrisponde angolo *sch* = = 84°,375. Si risolva la proporzione 1015,30 : 100 :: 754,65 : x da cui $x = \frac{754,65 \times 100}{1015,30}$ = m.l. 74,327. Si elevi alla direzione *sm* la perpendicolare *sc*, e su di questa si determini *sp*=ml. 74.327. Si faccia in *p* angolo *spk*=84°,375 e l'incontro *k* degli allineamenti *pk*, *sm* prolungati, danno *sk* = ml. 704,65.

b) *Inversamente si voglia misurare la distanza dalla stazione* s *di un punto* k.

Costruito sul terreno l'angolo *sch* = 84°,375 si prende la sua apertura con la falsa squadra, si eleva alla direzione *sk* la perpendicolare *sc*, e si percorre con la falsa squadra in modo che una delle linee di mira sia diretta al punto *s*, e ciò finchè in un punto *p*, l'altra linea di mira incontra il punto *k*.

Si misuri accuratamente e si trovi $sp.$ = ml. 74,327.

Si risolva la proporzione 100 : 1015,30 : : 74,327 : sk, da cui $sk = \frac{1015,30 \times 74,327}{100}$ ml. 754,65.

2. *In campo aperto misurare la distanza di un punto* c *da altro inaccessibile* b. (Fig. 101ª).

Per il punto c si traccino ad arbitrio due allineamenti fra loro perpendicolari, sui quali si raccolgono in a, d le proiezioni rette del punto inaccessibile b. Avremo distanza $cb = ad$.

Infatti nel rettangolo $abcd$ le diagonali sono fra loro uguali.

3. Sia s punto di stazione, x punto lontano (Fig. 102ª): si tracci un allineamento sp che formi con la direzione sx un angolo acuto tanto più prossimo al retto, quanto maggiore è la distanza del punto x; sia p proiezione retta del punto x sulla sp, e sia o proiezione del punto p sulla direzione sx, sarà distanza $sx = \frac{\overline{sp}^2}{so}$

Infatti i triangoli rettangoli spx, sop, aventi comune l'angolo acuto s sono simili onde $sx : ps :: ps : so$ ossia $sx = \frac{\overline{sp}^2}{so}$

4. (Fig. 95ª) *Vogliasi la distanza di un punto* m *da due punti* a, b *inaccessibili.*

Sulle direzioni ma, mb si raccolgono le proiezioni p, q dei punti a, b i triangoli rettangoli apm, bqm sono simili per avere comune l'angolo acuto m quindi $ma : mp :: mb : mq$ da cui

$ma = \frac{mp \times mb}{mq}$ » $mb = \frac{ma \times mq}{mp}$ e perciò misurata come al precedente la distanza ma di uno dei due punti, se ne ne ricava nel descritto modo quella dell'altro.

5. (Fig. 95ª) Nella misura di un segmento ab veduto a distanza, quando si possono raccogliere le proiezioni $g.h$ dei punti $a.b$ sopra una parallela af al segmento inaccessibile, come vedemmo allo Es. III, si ottiene direttamente $gh = ab$.

6 (Fig. 95ª) Quando ciò non sia possibile (Fig. 103ª) si traccino come all'Es. III le db, fm perpendicolari all'estremo ed al punto medio del segmento inaccessibile ab, ed all'altro estremo a di que-

sto si diriga una trasversale *da* che incontri le due perpendicolari. Sarà $ab = \sqrt{2.ah \times cd} = \sqrt{2\,(dc+ch) \times cd}$

Infatti, per essere *fm* parallela alla *db* per il punto medio della *ab*, risulta *c* centro del circolo circoscritto al triangolo rettangolo *abd*, del quale *cd* è raggio. Si raccolga in *h* la proiezione dell'estremo *b* sulla *da* sarà $ah = dc + ch$, e come dal (91) $ab = \sqrt{2.(dc+ch) \times cd}$. Così numericamente risulti $cd = \text{m.}^{i}\ 10$ e $ch = \text{m.}^{i}\ 2.25$ ossia $ah = \text{m.}^{i}\ 12.25$ e $2.ah = \text{m.}^{i}\ 25$, quindi sarà $ab = \sqrt{2\,ah \times ac} = \sqrt{25 \times 10} = \sqrt{250} = \text{m.}^{i}\ 15{,}81$.

7. (Fig. 104ª) Si tracci un allineamento arbitrario *mp*. Si raccolgano sopra questo le proiezioni rette *m.p* degli estremi *a*, *b* del segmento inaccessibile: per il punto *m* si tracci la parallela *mg* alla *ab*. Si prenda sulla *mp* un segmento arbitrario *mc*, e si raccolga in *d* sulla parallela alla *ab* la proiezione retta del punto *c*; misurati i segmenti *mc*, *mp*, *md* sarà $ab = \frac{mp}{md \times cm}$

Infatti, descritto il circolo di centro *c* e raggio *cm*, risulta *dm* semicorda nel detto circolo; ma la corda *mg* è parallela ad *ab*; e come si deduce dal (91) avremo, $ab \times 2.md \times cm = 2.mp$ e dividendo per 2 sarà $ab \times (md \times cm) = mp$; ossia $ab = \frac{mp}{md \times cm}$

8. (Fig. 95ª) Alle direzioni *ma*, *mb* si elevino le perpendicolari *mg*, *mh*, si prenda con la falsa squadra l'apertura dell'angolo *amb*, e si percorrano le perpendicolari finchè si rinvengono sotto le linee di mira simultaneamente i punti *a*, *b*, si marchino i punti *g*, *h* e sarà $gh = ab$.

9. (Fig. 105ª) Si scelga un punto *s* dal quale siano visibili gli estremi *a*, *b* dell'allineamento inaccessibile. Si traccino le direzioni *sa*, *sb* ed una terza *sh'* che faccia angolo più o meno acuto con le due prime. Si raccolgano sulla *sh'* le proiezioni *h*, *h'* dei punti *a*, *b*, e sulle direzioni *sa*, *sb* in *k*, *k'* le proiezioni dei punti *h*, *h'*. I triangoli rettangoli *sha*, *skh* per aver comune l'ang. acuto *s* sono simili onde come si è detto $ha = \frac{hk \times sh}{ks}$, e distanza $h'b = \frac{k'h' \times sh'}{k's}$. Sia ab-

bassata idealmente bm perpendicolare alla ha; nel triang. rettangolo amb sarà $ab = \sqrt{\overline{ma}^2 + \overline{mb}^2}$; pertanto $mb = hh'$ ed $ma = ha - h'b$ quindi $ab = \sqrt{\overline{hh'}^2 + \overline{ha - h'b)}^2}$

Es. VI. — *Determinare in vari modi l'estremo della corda bisettrice di un vertice di un triangolo.*

In un triangolo diciamo corda bisettrice di un vertice il segmento della bisettrice dell'angolo in quel vertice compreso dentro al circolo circoscritto al triangolo.

(Fig. 106ª) Nel triangolo ahb si voglia determinare l'estremo d della corda bisettrice hd al suo vertice inaccessibile h.

1. Avremo ang. $h = 180^0 - (a + b)$. Agli estremi $a.b$ della base si facciano con essa ang. $bad = abd = \frac{ahb}{2}$ e risulterà d estremo della corda bisettrice del vertice h.

Infatti la bisettrice hd dà arco $da = db$, quindi angolo $dha = dhb = \frac{ahb}{2} = abd = bad$ come misurati da archi uguali.

2. Si elevi la perpendicolare md sulla metà della base ab e si faccia ang. $mbd = \frac{ahb}{2}$, sarà evidentemente d estremo della corda bisettrice del vertice h.

3. Si elevi la perpendicolare mc sulla metà della base ab, e si formi con la base ang. $bac = 90^0 - ahb$. Sarà c centro e ca raggio del circolo circoscritto al triangolo. Si faccia $cd = ca$, evidentemente d estremo del raggio cd perpendicolare alla base ab è sulla metà dell'arco adb e perciò anche estremo della corda bisettrice del vertice h.

4. Per la metà della base ab si tracci la perpendicolare cd, e da un suo estremo a, si tracci parte della perpendicolare ae al lato bh; si formi col lato ah angolo $hae = bae$: il secondo di questi è derivato diretto ed il primo derivato inverso del vertice a nel triang. ahb, e perciò le ac, dc determinano col loro incontro il

centro c del triangolo, quindi fatta $cd = ca$ raggio del circolo circoscritto, risulterà d punto estremo della corda bisettrice al vertice h.

5. (Fig. 107ª) Si elevi af perpendicolare: in a alla direzione ah, si elevi nel mezzo della base le perpendicolare md; si formi con la base ang. $bag = 90° - hba$; si tracci la bisettrice dell'ang. gaf, e l'intersezione d di questa con la md sarà estremo della corda bisettrice al vertice h.

Infatti tracciata idealmente la hg perpendicolare alla base ab, sarà ang. $bhg = bag = 90° - hba$, quindi ang. bhg è derivato diretto del vertice h, del quale ang. ahg è derivato inverso: poichè per essere retto l'angolo haf l'ipotenusa fh è diametro del circolo circoscritto al triang. ahb: da ciò $bg = af$, ossia la bisettrice ad dell'ang. gaf come anche la perpendicolare md sulla metà della base s'incontrano nel punto d dell'arco adb punto estremo della corda bisettrice al vertice h.

6. Si elevino ad incontrarsi in f le perpendicolari af, bf alle direzioni ah, bh sui loro estremi a, b: sulla metà della ab si elevi la perpendicolare md; per f si abbassi alla md la perpendicolare fz raddoppiandola in zg; si tracci la bisettrice ad dell'angolo gaf, e l'intersezione d della ab con la md per il già detto risulta estremo della corda bisettrice dal vertice h.

7. (Fig. 108ª). Si traccino indefinite le bisettrici ak, br degli angoli a, b, del triang. ahb, e nei punti medi o, n dei segmenti di queste bisettrici tra i vertici a, b e l'incentro i si elevino ad esse le perpendicolari, queste s'intersecheranno nell'estremo d della corda bisettrice del vertice h.

Infatti per le bisettrici ak, br nel circolo circoscritto al triangolo sarà arco $kb = kh$, ed arco $ra = rh$; e supposta hd bisettrice del vertice h sarà anche arco $da = db$. Da ciò arco $ad + hk = bd + bk$. Nel triangolo adi trovasi angolo $aid = \text{arco}\frac{ad + hk}{2}$, ed angolo $dai = \text{arco}\frac{bd + bk}{2}$; quindi angolo $aid = dai$, ossia il triangolo adi è isoscele e $da = di$, ma $da = db$ e perciò anche il triangolo bdi è isoscele e conseguentemente le perpendicolari nei punti medi o, n delle rispettive basi, s'incontrano nell'estremo del lato comune id

che è distanza fra l'incentro i e l'estremo d della corda bisettrice dal vertice h.

8. (Fig. 109ª). Si prolunghi il lato hb. Si tracci nel vertice a la ag parallela alla hb, si bisechi con la af l'angolo hag; si elevi la perpendicolare md sulla metà della af, e la pd perpendicolare sulla metà del segmento bf; l'incontro d di queste perpendicolari è estremo della corda bisettrice del vertice h del triang. ahb.

Infatti per la bisettrice af abbiamo ang. $gaf = fah$, e per le parallele ag, hb anche ang. $gaf = afh$, onde il triangolo ahf di vertice h è isoscele, e perciò la bisettrice da questo vertice coincide con la perpendicolare elevata dal punto medio m della sua base af. Ma $hf = ha$ e $bf = ha - hb$, pertanto dal (92) sappiamo che l'estremo d della bisettrice del vertice h si trova nell'incontro della perpendicolare alla metà della base con quella elevata sulla metà della differenza dei lati ha, hb quindi, ecc.

9. In altro modo. Si prolunghino i lati ha, hb; si tracci ag parallela ad hb; e si elevi af perpendicolare in a alla bisettrice am' dell'angolo zag, e l'incontro d' delle perpendicolari elevate dai punti medi dei segmenti af, bf sarà evidentemente estremo della corda bisettrice al vertice h.

10. (Fig. 110ª) Quando del triangolo axb sia data la base ab ed i prolungamenti af, bs dei lati, e che sia invisibile il vertice x, allora tracciata per a la ah parallela alla bs, e preso segmento $ah = af$ si tracci la fhg: evidentemente il triangolo fxg risulta isoscele, e perciò la perpendicolare nel punto medio n della sua base fg passerà per il vertice invisibile x e sarà bisettrice in questo vertice. Nel triangolo fxg ang. $x = fah$, si faccia in b angolo $abo = \frac{fah}{2}$ e risulterà o estremo della corda bisettrice del vertice invisibile x.

11. (Fig. 111ª) In altro modo sia l'incontro e delle bisettrici degli angoli formati dai prolungamenti dei lati del triangolo agb con la sua base ab, sarà e excentro corrispondente alla base. Il centro d del triangolo aeb è anche punto estremo della corda bisettrice del vertice g del triangolo agb.

Infatti si determini il centro d del triangolo aeb s'iscriva il triangolo, e per il vertice e si tracci prolungato il diametro edi che

passerà per il vertice g del triangolo agb, poichè tracciate le corde ai, bi, i triangoli eai, ebi iscritti nei semicircoli d sono rettangoli, ma le ae, be sono bisettrici degli angoli bak, abf, quindi le ai, bi sono bisettrici degli angoli rispettivamente adiacenti bag, abg. Consegue che l'estremo i del diametro ei è incentro del triangolo agb, e la direzione ei che passa per l'excentro e e per l'incentro i in referenza al vertice g del triangolo agb, è bisettrice del vertice g e passa per esso.

12. (Fig. 112ª) Si elevino in a, b le perpendicolari alle direzioni ah, bh dei lati del triangolo ahb. Si bisechi l'angolo bfe che esse formano in opposizione al triangolo ahb, e si raccolga sulla bisettrice la proiezione d del vertice h, sarà d estremo della corda bisettrice al vertice h.

Infatti iscritto il triangolo e tracciato il diametro fh e la gh, perpendicolare alla base ab, per il più volte detto angolo $bhg=ahf$. Il triangolo fdh è rettangolo per costruzione, e poichè la sua ipotenusa hf è diametro il punto d trovasi sulla circonferenza.

Il triangolo efo è isoscele, per avere la bisettrice al vertice f perpendicolare alla base oe; quindi ang. $feo=foe=hob$; e perciò nei triangoli rettangoli hae, hbo essendo angolo $aeh=boh$ anche ang. $ahe=$ $=bhe$, ossia la dh è corda bisettrice del vertice h nel triangolo ahb.

Es. VII. — *Mediante l'estremo della corda bisettrice dell'angolo di un triangolo misurare i lati formanti quell'angolo.*

(Fig. 106ª) Determinato l'estremo d della bisettrice al vertice h del triang. ahb, si prolunghi uno dei suoi lati hb; si raccolga in p la proiezione del punto d. Si faccia $pm' = pb$ e dal punto d si faccia segnare il punto f sotto l'ang. $pdf = pdh$, e sarà $fb = ha$ » $fm' = hb$.

Infatti $pf = ph$, ma come dal (92) ph è semisomma, pb semidifferenza dei lati ha, hb; e da ciò $fp + pb = ah$ e $fm' = fp - pb = hb$.

I vari modi di determinazione dell'estremo della corda bisettrice al vertice di un triangolo, svolti nella precedente offrono, come dall'esposto esempio, molti mezzi per misurarne i lati finchè il triangolo s'a in parte accessibile: la stessa corda bisettrice e talora un frammento di questa, permettono anche di misurare i lati di un

triangolo inaccessibile, o del quale solo siano accessibili frammenti dei suoi lati come dai seguenti esempi.

(Fig. 113ª) Sia inaccessibile il triang ahb. Sia g l'intersezione delle perpendicolari agli estremi dei lati ha, hb del triangolo. Sia dm direzione della perpendicolare alla metà della base inaccessibile ab, si percorra la dm finchè trovasi il punto d dal quale angolo $adb = agb$, sarà d estremo della corda bisettrice al vertice h; poichè l'incontro g delle perpendicolari è sulla circonferenza circoscritta al triangolo ahb, e per essere angolo $adb = agb$, anche il punto d è sulla circonferenza e nella metà dell'arco sotteso dalla corda ab; quindi prolungato il lato hb, raccolta la proiezione p, e marcati i punti f, s sotto gli angoli $pdf = pdb$ » $pds = pdh$, risulterà $sp + pf = ah$ ed $sp - pf = hb$. Elevata alla dm in d la perpendicolare e raccolta su questa la proiezione h' del vertice a, risulterà $2.h'd = ab$.

2. (Fig. 114ª) *Operando dentro l'area del triang.* ahb *del quale sono inaccessibili i vertici, misurarne i lati.*

Nei modi noti si tracci la bisettrice mh di un vertice.

Sia la bmq perpendicolare alla mh e perciò $qm = \frac{qb}{2}$

Per il punto m e per quello medio o di mq si traccino come più volte si è detto, le parallele nr, ms al lato ha; e quelle mp, nz al lato ab. Essendo $hb = hq$ risulta $qa = ha - hb$; per la mp parallela alla ab dal punto medio m della qb, risulta $qp = \frac{qa}{2} = \frac{ha - hb}{2}$: onde $hp = \frac{ha + hb}{2}$. Per le parall. mp, nz dei punti medio ed estremo della hm, risulta $zp = \frac{hp}{2} = \frac{ha + hb.}{4}$ Da ciò si ricava lato $ah = 2.zp + pq$ » » lato $hb = 2.zp - pq$ e lato $ab = 4.rs$ inquantoché per essere $om = \frac{qb}{4}$ risulta $rs = \frac{ab}{4}$

3. *Lo stesso quesito quando uno dei lati* ab *del triangolo* ahb *è del tutto inaccessibile* (Fir. 115ª).

Mediante i segmenti zp, pq si calcolino come sopra i lati ha, hb,

per il lato inaccessibile ab si tracci la bx bisettrice al vertice b. Idealmente sia $ha' = ha$ ed $a'd$ parallela alla bx: dal (94) rilevasi

che $ab + bh = \frac{\overline{ah}^2}{hd}$ ove nel caso le lunghezze ab, hd sono incognite; però possiamo determinare hd per dedurne ab, poichè nei triangoli simili $a'hd$, bhx conosciamo i lati ha', hb ed anche $hx = hz + zx =$
$= \frac{ah + hb}{2} + zx$. Ciò posto, per la proporzione $hb : ha' :: hx : hd$

trovasi $hd = \frac{ha' \times hx}{hb}$: ma $ab + bh = \frac{\overline{ah}^2}{hd}$ quindi $ba = \frac{\overline{ah}^2}{hd} - hb$

4. Nel caso in cui *del triangolo sia accessibile un lato, il prolungamento degli altri due ed il resto sia invisibile*; come quando si opera in un'area recinta da muro $fbak$ (Fig. 111ª), e vogliono misurarsi i lati invisibili ga, gb del triangolo, allora si determini l'estremo d della corda bisettrice al vertice g, come è detto alla Eserc. VI, 1°), nonchè il punto k sotto l'angolo $hdk = hdp$, e risulterà evidentemente $ak = gb$ » $kh - ha = ga$.

Si vede dalle precedenti che la corda bisettrice di un vertice permette le costruzione di segmenti uguali ai lati di un triangolo talchè questo si misura e può ricostruirsi senza ricorrere alla misura e riproduzione dei suoi angoli, ciò che diminuisce la probabilità di errori, ma la geometria offre altri modi per rilevare i triangoli senza misurare i loro angoli, e siccome la misura dei poligoni si riduce a quella dei triangoli nei quali si decompongono mediante le diagonali da un vertice, così non crediamo superfluo il destinare la seguente esercitazione nel ricordare taluni dei detti modi.

Es. VIII. — *Misurare sul terreno dei triangoli in parte o in tutto inaccessibili, coi metodi del triangolo simile, del rovesciamento, della riproduzione, del calcolo delle distanze ecc.*

1 (Fig. 95ª) Sia accessibile il vertice m del triangolo amb, si elevino le mh, mg rispettivamente perpendicolari ai lati ma, mb, e si

percorrano finchè si trovano i punti *h*, *g* dai quali abbiasi angolo *ahb* = *amb* = *agb*. Sappiamo che le *ga*, *hb* saranno ambedue perpendicolari alla *ab* nei suoi estremi, quindi *gh* = *ab* e parallela ad essa; e triangolo *p'mq'* simile ad *amb*. Da ciò si ottiene la misura dei lati del triangolo *amb* mediante i rapporti *gh* : *p'q'* :: *ma* : : *mp'* :: *mb* : *mq'*.

Gli angoli del triangolo *amb* sono dati da quelli del suo simile *p'mq'*.

2. (Fig. 116ª) Sia accessibile la base del triangolo *ahb*, le perpendicolari *bo*, *ao* agli estremi dei lati sono corde del circolo circoscritto al triangolo; e perciò dai punti medi *m*, *n* di queste elevate ad incontrarsi in *c* le perpendicolari alle *oa*, *ob*, il triangolo *mcn* risulta simile a quello *ahb* ed i lati del primo stanno agli omologhi del secondo come 1 : 2.

3. *Sia invece inaccessibile il triangolo* ahb; tracciate da distanza le perpendicolari agli estremi dei suoi lati ad incontrarsi in *o*; si segni la *pp'* parallela alla *ab* (Es. III), marcando le proiezioni *p*, *p'* degli estremi *a*, *b* della base; a partire da *o* si determini un segmento *oz'* che stia ad *op'* in un voluto rapporto *m* : *n*; si elevi in *z'* la perpendicolare ad incontrare in *b'* la *ob*. Si tracci *b'a'* parallela alla *pp'*. Si elevino in *b'*, *a'* alle *ob*, *oa* le perpendicolari ad incontrarsi in *h'*, evidentemente il triangolo *a'h'b'* è simile a quello *ahb* ed i lati del primo stanno agli omologhi nel secondo come *m* : *n*.

4. (Fig. 117ª) *Misurare il triangolo* abd, *del quale è accessibile il vertice* a *mediante il suo rovesciamento.*

Elevate nel vertice *a* le perpendicolari *am*, *an* ai lati *ab*, *ad*, da un punto arbitrario *m* dalla perpendicolare al lato *ad*, e sotto l'angolo *amd'* = *amd* si segni il punto *d'*. Da un punto arbitrario *n* della perpendicolare *an* al lato *ab* sul suo prolungamento, sotto l'angolo *anb'* = *anb* si segni il punto *b'*. Evidentemente il triangolo *ad'b'* = *adb*.

5. (Fig. 118ª) Sia inaccessibile il triangolo, si prolunghino per intraguardo in *b''*, *d''*, i lati *ab*, *ad* del triangolo inaccessibile *abd*, ed in punti arbitrari *c*, *c'* elevate ai prolungamenti le perpendicolari, da un punto qualunque *o* di quella alla direzione *da* si se-

gnino su questa i punti a', d' sotto gli angoli $coa' = coa$ » $cod' = cod$. Da un punto arbitrario o' della perpendicolare alla direzione ba si segnino i punti a'', b'' sotto gli angoli $c'o'a'' = c'o'a$, e $c'o'b'' = c'o'b$: evidentemente risulta $a'd' = ad$ » $a''b'' = ab$, perciò in uno dei modi noti fatta $a'b'$ parallela ed uguale ad $a''b''$ evidentemente sarà triangolo $a'b'd' = abd$.

6. (Fig. 119ª) *Riprodurre il triangolo inaccessibile* abh *mediante le proiezioni rette dei suoi vertici.*

Si elevi una perpendicolare dp al prolungamento di un lato bh del triangolo inaccessibile, e sulla ph' perpendicolare alla dp si raccolgano in s', b', h' le proiezioni dei vertici a, b, h. Sia $b'k$ perpendicolare al prolungamento del lato ba, ad incontrare la as' si elevi $b'a'$ perpendicolare alla $b'k$; risulta evidentemente triang. $a'b'h' = abh$, inquantochè i due triangoli avendo lato $ab = a'b'$ e parallelo ad esso e lato $bh = b'h'$ e parallelo ad esso, hanno anche angolo $abh = a'b'h'$ ecc.

7. (Fig. 120ª) *Essendo accessibile la base* ab *calcolare i lati del triangolo* ahb.

In uno dei modi svolti allo Es. IV si determini il centro c del circolo circoscritto al triangolo. Sia q proiezione del vertice h sul raggio cb e sia p proiezione dello stesso vertice sul raggio o diametro ca, ed avremo $hb = \sqrt{2.bq \times cb}$ » $ha = \sqrt{2.ap \times cb}$

8 Nella proiezione s del vertice h sulla base ab si elevi la perpendicolare. Si faccia ad incontrarla ang. $abo = 90^0 - bah$ e si tracci la ao. Il punto o trovasi sulla circonferenza circoscritta al triangolo ahb; e però il triangolo hbo iscritto in essa da $bh \times bo = 2.bs.r$ essendo r raggio della detta circonferenza. Si determini e misuri come sopra il raggio $r = cb$ e sarà $hb \times bo = 2.bs \times bc$, ossia $hb = \frac{2.bs \times bc}{bo}$ ed analogamente $ha = \frac{2\,as \times bc.}{ao}$

9. Calcolare i lati del triangolo inaccessibile abd (Fig. 121ª). Sopra un allineamento arbitrario $a'd'$, siano a', b', d', proiezioni rette dei vertici del triangolo. Come all'Es. V, 3°, si misurino le distanze aa'. bb' dd'; ossia $aa' = \frac{\overline{a'h}^2}{a'o}$ » $bb' = \frac{\overline{bh'}^2}{bo'}$ » $dd' = \frac{\overline{d'h''}^2}{d'o''}$, da cui si trae

$ab = \sqrt{\overline{a'b'}^2 + (\overline{aa'} - \overline{bb'})^2}$ » $ad = \sqrt{\overline{a'd'}^2 + (\overline{a'a} - \overline{dd'})^2}$ » $bd =$
$= \sqrt{\overline{b'd'}^2 + (\overline{d'd} - \overline{bb'})^2}$.

10. (Fig. 122ª) *Misurare un triangolo* afb *del quale è praticabile un lato* ab *e suo prolungamento.*

Si prolunghino il lato *af* in *m* ed *ab* in *g*. Si cerchi sulla direzione *ab* un punto *d* che dia ang. $adf = \frac{bam}{2}$, ed un secondo punto *g* che dia ang. $bgf = \frac{abf}{2}$. I triangoli *fad*, *fbg* risultano isosceli avendo per costruzione alla base angoli metà dei supplementari ai rispettivi vertici, e perciò i segmenti *ab*, *ad*, *bg* sono rispettivamente uguali ai tre lati del triangolo *abf*.

11. *Dall' interno dell'area misurare i lati di un triangolo del quale sono inaccessibili i vertici.*

(Fig. 123ª) Nel triangolo *adb* elevate alle direzioni *db*, *da* le perpendicolari *mo*, *no* in modo che la *mo* sia diretta al vertice *b*, si faccia con una perpendicolare *fe* alla direzione *ab*, un angolo $feb = nob$, si prolunghi la *be*, si percorra finchè si rinviene un punto *c* che dia ang. $bca = 2,feb$. Si abbassino da *c* alle direzioni dei lati le perpendicolari *ch*, *cp*, *ck*, ed avremo $ab = 2.pk$ » $ad = 2.hk$ » » $db = 2.ph$.

Infatti, per essere *dbm*, *abc* angoli derivati inversi del vertice *b* la *be* passa per il centro del circolo circoscritto al triangolo *adb*; ma il triang. *acb* è isoscele, quindi *c* è il centro, e le perpendicolari da esso ai lati danno i loro punti medi *h*, *k*, *p*; pertanto le congiungenti i punti medi dei lati di un triangolo formano un secondo triangolo simile che ha i lati omologhi metà dei primo, quindi ecc.

Se il terreno molto imbarazzato non permette la misura diretta delle distanze fra i punti medi dei lati, si calcoli nei modi noti il raggio *cb* ed avremo evidentemente $ab = 2\sqrt{\overline{cb}^2 - \overline{ch}^2}$ » $bd =$
$= 2.\sqrt{\overline{cb}^2 - \overline{ck}^2}$ » $ad = 2\sqrt{\overline{cb}^2 - \overline{cp}^2}$.

Nella pratica interessa talora la costruzione di un triangolo al pari della sua misura, perciò crediamo proficuo ricordare nella seguente esercitazione alcuni modi di costruzione di un triangolo.

Es. IX. — 1. (Fig. 124ª). *Dato un lato e due dei 3 elementi triangolari di un vertice* (42-43) *costruire il triangolo.*

Nel triang. *ahb* sia data la base *ab* ed i derivati del vertice. Le perpendicolari *am*, *bn* agli estremi della base, danno ang. $nbh = D_h$, ed ang. $mah = I_h$: ovvero si faccia ang. $abh = 90^0 - D_h$; ed ang. $bah = 90^0 - I_h$, ed in ambedue i casi il triangolo *ahb* è il richiesto.

Infatti nel primo caso, si abbassi dal vertice la perpendicolare *hk* e come alterni interni ang. $khb = hbn = D_h$ « angolo $kha = ham = I_h$.

Nel secondo caso nei triangoli rettangoli *hkb*, *hka* avendo costruito in *a*, *b* gli angoli complementari di quelli assegnati come derivati del vertice *h*, evidentemente questi sono i richiesti.

2. Siano dati uno dei lati *hb* ed i derivati del vertice *h*. Si formi l'ang. *h* con la somma $bhk + kha$ degli assegnati derivati, e determinato il lato *hb*, si abbassi *bk* perpendicolare alla *hp* ad incontrare la *ha* : ovvero si faccia ang. $hbk = 90^0 - D_h$ ad incontrare la *ha*; in ambedue i casi il triangolo *ahb* è evidentemente il richiesto.

3. Sia dato un lato qualunque del triangolo e ang. D_h e C_h ovvero ang. I_h e C_h. Si ottiene il terzo elemento del vertice *h* facendo il complemento della somma degli elementi dati; così sia ang. $khb + bhg = D_h + C_h$, elevata in *h* la perpendicolare *ha* alla *hg* risulterà ang. $kha = I_h$; lo stesso dicasi per ottenere il derivato *h*. Formati così i tre elementi del vertice si ricade nei casi precedenti, che risolvonsi come si è detto.

4. *Costruire sul terreno un triangolo del quale sono date le lunghezze* m, n, b *dei tre lati: essendo* m>n.

(Fig. 125ª) Sia s la somma $m + n$ e d la differenza $m - n$. Si faccia il quoto $q = \frac{s \times d}{b}$ e per costruire il triangolo sul terreno, se il terzo lato b è maggiore di ciascuno degli altri due lati, allora sopra un allineamento si prenda $ab = q$, ed $ab' = b$; se invece il terzo lato b, è minore di ciascuno degli altri due, si prenda $ab = b$ ed $ab' = q$. Si elevi la perpendicolare nel punto medio h della differenza $b - q$ ovvero $q - b = bb'$, e si faccia $hc = \sqrt{n^2 - \left(\frac{bb'}{2}\right)^2}$; congiunto il punto c così gli estremi a, b del lato dato b il triangolo acb ovvero acb' resterà completato.

Infatti suppongasi costruito il triangolo; col lato minore $n = cb = cb'$ come raggio, si descriva idealmente la circonferenza Sarà $ac + cd = m + n = s$ somma, e $ac - cd' = m - n = d$ differenza dei lati m, n. Affinchè il triangolo acb ovvero acb' possa chiudersi, il terzo lato $b = ab$, ovvero $b = ab'$, dovrà incontrare la circonferenza in un punto b ovvero b', inquanto che esso dovrà essere non maggiore della somma e non minore della differenza degli altri due lati. Nel secondo caso si prolunghi ab in b'. Le secanti ad, ab' danno $ad \times ad' = ab' \times ab$, ossia $s \times d = b \times q$; quindi $q = \frac{s \times d}{b}$.

In ambedue i casi la perpendicolare hc, sulla metà della differenza bb', corda del circolo di raggio cb', passa per il centro c vertice del triangolo acb ovvero acb'. Nei triangoli rettangoli chb, chb' l'ipotenusa $cb = cb' = n$, e cateto $hb = hb' = \frac{bb'}{2}$. Da ciò ricavasi l'altezza ch del voluto triangolo cioè $ch = \sqrt{n^2 - \left(\frac{bb'}{2}\right)^2}$.

Si osservi che è nota l'area di un triangolo del quale si conoscono i tre lati, poichè avremo come sopra altezza $h = \sqrt{n^2 - \left(\frac{bb'}{2}\right)^2}$ da cui area $A = \frac{hb}{2}$.

5. Lo stesso quesito. Siano date le lunghezze ad, ab, bd dei tre lati del triang. Si determini una delle date lunghezze ad come base, e

si faccia la differenza fra il quadrato di questa e la somma dei quadrati degli altri due lati; cioè $\overline{ab}^2 + \overline{bd}^2 - \overline{ad}^2 = r$. Sarà $r = 2.ab \times$ $\times bp$, ove bp è proiezione del lato bd sul lato ab, e quindi $bp - \frac{r}{2.ab}$. (Fig. 126ª) Sia costruito idealmente il triang., e q, p siano proiezioni dei vertici a, d sui lati opposti. I triangoli abd, pbq sono simili (55) e perciò $db : bp :: ab : bq$, ossia $bq = \frac{ab \times pb}{bd}$. Sia z proiezione del punto q sul lato ab. I triangoli simili bqz, bdp danno $bd : bp :: bq : bz$ da cui $bz = \frac{bp \times bq}{bd}$. Calcolati nel detto modo i segmenti bp, bq, bz, per costruire il triangolo, sopra un allineamento si determinino i segmenti bp, bz; si elevi alla bp in z la perpendicolare, si determini la lunghezza zq di questa, facendo $zq = \sqrt{\overline{bq}^2 - \overline{bz}^2}$: si tracci indefinita la direzione bq e si elevino in p, q le perpendicolari alle ba, bd ad incontrarle inversamente in a, d e tracciata la ad, per il già detto il triangolo adb è il richiesto.

6. Lo stesso quesito. In un rapporto arbitrario con i lati dati per il triangolo si determinino tre segmenti tali che le rispettive lunghezze siano minori della catena agrimensoria della quale si dispone; si costruisca mediante la catena e per intersezione con i detti segmenti il triangolo pqb che risulta simile a quello richiesto. Si prolunghino due dei suoi lati bp, bq, ed elevate ad essi in p, q le perpendicolari ad incontrarli in a, d, per il già detto risulterà adb il triangolo richiesto.

I teoremi svolti sulle serie triangolari addizionali e differenziali offrono molti modi per risolvere problemi riguardanti le costruzioni sul terreno; ci limitiamo a darne due soli esempi.

7. (Fig. 127ª) *Sia data la base* ao *e l'altezza* ph *di un triangolo, si domanda un secondo triangolo di diversa base e della stessa altezza, che abbia col primo l'area in un assegnato rapporto* m : n *e la stessa somma dei quadrati dei tre lati.*

Sopra un allineamento si determini un segmento ao eguale alla base data per il primo triangolo, ed un secondo segmento ob

che stia ad ao nell'assegnato rapporto $m : n$. Dall'estremo b si determini un segmento $bp = ao$. Si elevi in p la perpendicolare facendo ph eguale all'altezza assegnata ai due triangoli; si traccino le ha, ho, hb, ed i triangoli aho, ohb saranno i richiesti.

Infatti nel triangolo ahb le proiezioni pa, pb dei lati danno $\overline{ah}^2 + \overline{pb}^2 = \overline{hb}^2 + \overline{ap}^2$ (75) pertanto $pb = ao$ » $ap = ob$ e sostituendo $\overline{ah}^2 + \overline{ao}^2 = \overline{hb}^2 + \overline{bo}^2$. Aggiungendo da ambo le parti $\overline{ho}^2$, sarà $\overline{ah}^2 + \overline{ho}^2 + \overline{oa}^2 = \overline{bh}^2 + \overline{ho}^2 + \overline{ob}^2$. Inoltre le aree dei due triangoli della stessa altezza stanno fra loro come le basi: ossia triang. aho : : ohb : : ao : ob : : m : n.

8. (Fig. 128ª) *Dato un triangolo isoscele* adb *costruire graficamente una serie di triangoli che abbiano la stessa base* ab *e diano lo stesso prodotto dei lati* $da \times db = \overline{da}^2$.

Si prolunghi la base: si faccia segmento $ah = da + db$; con questo segmento come raggio e centro nel vertice, si tagli in h' la base prolungata; si traccino quante vogliansi direzioni ad incontrare il segmento ah' esterno al triangolo. Come dal (90) avremo $dh' \times do = dg' \times dm = df' \times dn = \ldots\ldots da \times db = \overline{da}^2$; ossia ciascuna coppia dei segmenti dà i lati di uno dei triangoli della richiesta serie; e perciò col centro alternativamente negli estremi a, b della base e con i due segmenti di ciascuna coppia come raggi, si costruiscano i triangoli agb, afb ecc. che saranno i richiesti.

Es. X. — *Sebbene la misura dei poligoni si riduce a quella dai triangoli nei quali possono decomporsi con le possibili diagonali da un loro vertice, crediamo opportuno dare alcuni modi pratici per misurare i poligoni in tutto o in parte inaccessibili.*

1. *Da un punto* o *interno all'area di un poligono inaccessibile al perimetro, misurarne lati, angoli perimetrali ed area.*

(Fig. 129ª) Alle direzioni oa, ob di due vertici consecutivi si ele-

vino le perpendicolari ob', oa', e si percorrano finchè si trovino i punti a', b' dai quali sotto l'angolo aob sono simultaneamente situati i punti a, b. Avremo $a'b' = ab$ (39). Della $a'b'$ si marchi la parte $a''b''$ racchiusa dentro angolo aob.

Si elevi in o alla ob la perpendicolare oc' e si percorra finchè in c' sotto l'ang. boc cadono i punti b, c, la $c'b''$ risulta parallela al lato cb: della $c'b''$ si marchi la parte $c''b''$ compresa dentro l'ang. boc.

Si elevi alla oc la perpendicolare od' e si rinvenga d' dal quale sotto l'ang. cod cadono i punti c, d e della parallela $d'c''$ alla dc, si marchi la parte $d''c''$ compresa dentro l'angolo cod; e così proseguasi girando nello stesso senso il perimetro. Avremo poligono $a''b''c''d'' \ldots =$ P' simile a quello $abcd =$ P e però $a''b'' : (a'b' = ab) :: b''c'' : bc :: c''d'' : cd :: \ldots$.

Gli angoli perimetrali del poligono P sono dati da quelli corrispondenti nel poligono simile P'.

L'area H del poligono P, essendo h quella del simile P', e data dalla proporzione $H : h :: \overline{a'b'}^2 : \overline{a''b''}^2$.

2. *Misurare un poligono inaccessibile mediante la sua riproduzione.*

(Fig. 130ª). Siano a', b', c', d' proiezioni rette dei vertici inacessibili a, b, c, d sopra un allineamento qualunque $a'd'$.

Come alla (Es. V) si misurino le distanze $a'a$, $b'b$, $c'c$... prolungando queste proiettanti. Si aggiunga alla prima distanza $a'a$ un segmento $a'a''$ tale che $a'a + a'a'' = k$ lunghezza intera ed arbitraria. Si aggiungano alle calcolate distanze $b'b$, $c'c$, $d'd$ dei segmenti che diano $aa'' = bb'' = cc'' = dd'' = k$ ed evidentemente il poligono $a''b''c''d''$ è uguale a quello inaccessibile $abcd$ e può direttamente misurarsi.

3. Se sul terreno vogliono calcolarsi le lunghezze dei lati del poligono inaccessibile; misurate le distanze $a'a$, $b'b$, $c'c$, $d'd$ se ne deduce la misura dei lati facendo $ab = \sqrt{\overline{a'b'}^2 + \overline{(a'a - b'b)}^2}$, $bc = \sqrt{\overline{b'c'}^2 + (c'c - b'b)^2}$ e così di seguito.

4. *Tagliare i lati di un triangolo* abb *in modo che il tronco quadrilatero* abde *sia iscrittibile* (Fig. 131ª).

In un punto arbitrario d del lato bh si faccia ang. $edh = hab$ evidentemente risulta ang. $eab + bde = 180°$; ossia il quadrilatero $deab$ è iscrittibile poichè in esso gli angoli opposti sono supplementari.

5. *Verificare se un dato punto* c *del piano sia equidistante da più punti* a, b, d ... *e cioè se il poligono* abdefg *sia iscrittibile dal centro* c (Fig. 132ª).

Si traccino parzialmente le direzioni ca, cb, cd... ed a partire da c si determinino su di esse i segmenti uguali ca', cb', cd',... Se risulta angolo $cb'a = ca'b$ « ang. $cb'd = cd'b$ ecc. allora c sarà centro del poligono iscrittibile $abdefg$.

Infatti per avere un lato eguale ed angoli eguali il triangolo $cba' = cab'$, come anche triang. $cdb' = cbd'$ ossia $ca = cb = cd = \ldots$ e perciò raggi del circolo di centro c.

Si osservi che congiungendo due a due gli estremi dei segmenti uguali radianti da c si forma il poligono $a'b'd'e' \ldots g'$ il quale risulta simile a quello di perimetro inaccessibile $abde \ldots g$; quando siasi verificato che questo è iscrittibile e perciò misurato nei modi noti ad una distanza ca, e fatto il rapporto $ca : ca'$, misurando il poligono praticabile $a'b'd'e' \ldots g$ se ne deduce come al (1°) le misure del suo simile impraticabile $abde \ldots g$.

6. (Fig. 132ª). *Con raggio arbitrario ovvero assegnato costruire dal centro* c *un poligono inscrittibile regolare o no del quale siano dati ordinatamente gli angoli al centro.*

Se il poligono è irregolare si facciano al centro gli angoli acb, bcd, ... ordinatamente eguali a quelli assegnati.

Se il poligono è regolare di n lati, si facciano al centro n angoli eguali nei modi svolti alla (Es. I) secondochè $\frac{360°}{n}$ sia angolo graficamente costruibile o no; quindi sugli allineamenti ca, cb, cd si prendano i segmenti uguali ca', cb', cd'. Se il raggio è arbitrario sopra uno degli allineamenti ca' si collochi a piacere un segnale a, e sull'allineamento seguente cb' si collochi un segnale b sotto l'angoto $ca'b = cb'a$. Sull'allineamento cd' si collochi un segnale d, sotto l'angolo $cb'd = cd'b$, e così in proseguo finchè

il poligono si chiude. Se poi il raggio è assegnato r, come alla (Es. V. 1°) si collochi il segnale ad una distanza $ca = r$, e nel resto si opera come sopra.

La misura degli angoli perimetrali lati ed area del poligono $abde...g$ si deduce da quella degli stessi elementi nel suo poligono simile $a'b'd'e'...g'$.

7. *Costruire un poligono irregolare iscrittibile del quale sono dati i lati successivi e la congiungente gli estremi non comuni di due lati consecutivi.*

(Fig. 133ª) Come alla (Es. IX. 4°) si costruisca il triangolo abd del quale è data la lunghezza dei tre lati; si determini il centro c del circolo circoscritto al triangolo abd che lo sarà anche all'intero poligono. Si misuri il raggio cd, e per procedere alla completazione del poligono si costruiscano ordinatamente come al precedente i triangoli isosceli dce, ecf... gca i quali abbiano per rispettiva base i lati successivi assegnati al poligono.

8. *Costruire, girando il perimetro, un poligono irregolare del quale è dato per lunghezza e posizione un lato* ab *non che il valore degli* n *angoli successivi* z, z', z" *al centro inaccessibile, essendo* z *l'angolo al centro corrispondente al lato dato* ab (Fig. 134ª).

Nell'estremo b del lato dato, si faccia ang. $abg = \frac{180^0 - z}{2}$, e determinato un segmento bg, si faccia ang. $bgi = z$ ed ang. $bgh = z'$. Si prenda $gh = gb$, e si tracci prolungata la bh.

Per determinare la lunghezza bd del lato opposto al secondo angolo al centro z', si risolva la proporzione $bi : ba :: bh : bd$ » $bd = \frac{ba \times bh}{bi}$. Si faccia in d ang $bdm = dbg$ e preso segmento $dm = bg$, si faccia ang. $dmo = z''$; preso $mo = md$ si tracci indefinita la do, e si determini la lunghezza del lato opposto all'ang. z'' facendo $bh : bd :: do : de$ ossia $de = \frac{bd \times do}{bh}$, e così proseguasi finchè il perimetro si chiude.

La dimostrazione è evidente.

2. *Costruire il poligono, dato un vertice e le direzioni al centro invisibile passanti per i vertici del poligono.*

(Fig. 134ª) Siano aa', bb', dd' . . . le concorrenti al centro invisibile c, e sia a un vertice del poligono. Si elevi in questo punto alla aa' la perpendicolare ad incontrare in h la bb'. Nel triangolo rettangolo cah, l'ang. acuto h è complemento di quello al centro c; e l'angolo che la perpendicolare ah all'estremo del raggio del poligono iscritto forma col lato ab di questo, è $bah = \frac{ach}{2}$; e perciò si faccia in a con la perpendicolare ah l'angolo $hab = \frac{90^0 - ahb}{2}$, e risulterà ab lato del poligono fra le concorrenti al centro aa', bb'. In egual modo elevata in b, la perpendicolare alla bb', ad incontrare in i la dd', si faccia in b con la bi angolo $ibd = \frac{90^0 - dib}{2}$, e risulterà bd lato del poligono; e così proseguasi finchè il poligono si chiude.

Quando accada che due concorrenti successive bb', ff' siano tra loro inclinate in modo che la perpendicolare bi non incontra la ff', allora si prenda $bi = ah$ e sulla bi si costruisca il triangolo $bdi = abh$, risulterà evidentemente isoscele $acb = bcd$. Si elevi in d alla di la perpendicolare $dk = bi$ e si faccia triangolo $kde = bdi$, e così proseguasi finchè si raggiunga un punto e, dal quale la perpendicolare alla ke incontra la concorrente ff', ed allora fatto ang. $lef = \frac{90^0 - elf}{2}$, sarà f vertice, e fe lato del poligono . .

3. *Percorrendo il perimetro costruire un poligono regolare di* n *lati, del quale è dato un lato* ab.

(Fig. 135ª) Si costruisca col lato dato in un suo estremo un ang $= \frac{360^0}{n}$ sia o no angolo costruibile, nei modi dati alla Es. I. Si prenda $bd = ab$; si faccia ang. $zde = dbs = \frac{360^0}{n}$; si prenda $de = db$ e così proseguasi finchè il poligono si chiude.

Infatti nel poligono regolare gli angoli esterni e volti nello stesso senso sono quanti gli angoli al centro ed eguali ad essi.

Es. XI. — *Misure dei terreni di perimetro curvilineo o mistilineo.*

La varietà delle figure di contorno curvilineo o mistilineo e di area quadrabile è infinita (Parte III), di conseguenza sono infiniti i casi nei quali l'area di un terreno di perimetro curvilineo o mistilineo risulta in tutto o in parte quadrabile direttamente L'operatore il quale possegga la perfetta cognizione delle forme perimetrali che caratterizzano le figure quadrabili, prima di procedere alla misura di un terreno, girandone il perimetro deve palinare e misurare le corde dei tratti non rettilinei di esso, quindi paragonandole due a due riconoscere sè per avventura presentino i caratteri di forma delle figure quadrabili.

Ne diamo un solo esempio.

(Fig. 136ª) Percorrendo il perimetro del terreno T, siansi picchettate e misurate le corde *ab*, *ce*, *ef*, *gh*, *hi*, *ik*, *lm* dei suoi tratti curvilinei e siasi verificato

1. Che corda $ef = gh$ e con grande approssimazione figura $+x = -x'$.

2. Che il tratto *fyg* del fosso possa decomporsi nelle figure $+s = -s'$.

3. Che la corda *ce* non ha la sua uguale, ma può essere sostituita dalle corde $ed = hi$ e $dc = lm$, e che per approssimazione risulta fig. $+r = -r'$ » $+z = -z'$.

4. Che corda $ba = ik$ e fig. $+o = -o'$ e corda $qn = qa$ e figura $+P = -P'$, ne dedurremo che l'area del terreno T è equivalente a quella del poligono rettilineo *abcefghklmnq*, del quale si procede alla misura diretta.

Il metodo isoscelico riesce in pratica utilissimo nei casi di permute, miglioramenti stradali, rettificazioni di confini e simili. Ad esempio:

1. (Fig. 136ª). I confinanti T, B gravati in consorzio della manutenzione del fosso irregolare e di confine *hgyfe*, determinano di rettificarne il corso con permuta di ugual quantità di terreno.

Poichè l'appezzamento x' della proprietà T è equivalente a quello x della proprietà B, il corso del fosso può regolarsi secondo la linea spezzata *hgfe*. Ovvero essendo appezzamento *eyf* della proprietà B equivalente a quello *hyg* della proprietà T, il fosso potrà seguire il rettifilo *he*.

2. I confinanti A, T determinano di portare in rettifilo il tronco *aqn* della loro strada consorziale e di confine, senza scambievole perdita di terreno.

Si verifichi che segmento curvilineo $q'tn = qt'a$, e la strada potrà percorrere il rettifilo *an* senza diversità di acquisto o perdita di terreno tra i confinanti.

(303) Un istrumento topografico deve essere di semplice costrustruzione, di facile uso, e graduato con metodi del tutto geometrici. Riteniamo che l'istrumento il quale ora descriveremo sommariamente, risponda alle dette condizioni.

Aritmètro

(304) (Fig. 137A). Al semicircolo metallico ABD è saldato un semi-anello circolare AEB ed una lancia CE terminante con un filo sottile *mn*; questo al suo estremo è fissato in E al semi-anello. I fili verticali di due mirini a cerniera coincidono con la direzione del diametro A B del semicircolo nei due estremi di esso.

(Fig. 137B). Quattro mensolette *m* collegano il semicircolo e semi-anello col sottostante rocchetto *r*, il quale è impernato e girante sul piede metallico P.

Il piede P ha una doppia snodatura a sfera s la quale permette d'inclinare il piano del semicircolo fino a renderlo verticale. Lo stesso piede P si posa, fissa e livella sul tavolo del tripode T come si usa per gli altri istrumenti topografici.

Un asse ossia cilindretto verticale *a* passa a leggiero sfregamento per un foro praticato nel centro *c* del semicircolo; la parte inferiore del cilindretto termina in punta *k* e posa nel giusto mezzo del rocchetto *r*.

Immediatamente sotto al piano del semicircolo, al detto cilindro è saldato nel suo centro un disco circolare *d*, graduato come diremo. All'estremo superiore del cilindretto e al disopra del semicircolo, è saldato il sostegno del canocchiale *c*,

Per la descritta disposizione mentre il semicircolo e semianello sono fissi al piede P, col canocchiale C ruota anche il disco graduato *d*.

Il diametro AB del semicircolo diremo *linea base* e quello ad esso perpendicolare DE diremo *direttrice*.

Graduazione dell'Aritmètro

(Fig. 137ª D) Sul piano del disco *d* e concentriche con esso sono segnate quattro circonferenze di raggi crescenti *ca*, *cb*, *cd*, *ce*, delle quali la più piccola *ca* è adibita alla misura degli angoli, e le altre tre alla misura dei seni degli stessi angoli.

Dei diametri perpendicolari AB, DE il primo si dice pure *linea base* ed il secondo *direttrice*; con questo collima la linea di mira del canocchiale saldato, come abbiamo detto, all'estremo superiore dello stesso asse del disco *d*.

Nelle intersezioni della direttrice DE con le quattro circonferenze si segna il zero delle rispettive graduazioni, le quali si sviluppano simmetriche dalle due parti della direttrice dagli estremi E aquelli B dei quattro diametri coincidenti con essa.

Le semicirconferenze di raggio *ca* si graduano per archi 3° e loro duennesimi, come dicemmo al (25).

Per graduare le circonferenze di raggi *cb*' *cd*, *ce* si dividano in 100 parti uguali ciascuno dei raggi *ce* coincidenti con la linea base A.B. Si marchino sulle due semicirconferenze corrispondenti i punti d'intersezione con esse delle parallele alla direttrice DE passanti per gli estremi delle dette parti. Dalle 200 intersezioni delle parallele con la circonferenza *ce*, si traccino diretti al centro altrettanti segmenti rettilinei che incontrino la circonferenza di raggio *cd*; ogni dieci di detti segmenti rettilinei a partire dal zero, uno si prolunga ad incontrare la circonferenza di raggio *cb*. Quando riesca possibile, ciascuna delle 100 parti nelle quali sono divisi i raggi *ce* sulla AB, si suddivide in 10 parti delle quali si marcano sulla circonferenza maggiore *ce* le intersezioni delle parallele alla direttrice DE, se ciò riesce impossibile, si divida per metà ciascun centesimo del raggio e si marchino sulla circonferenza le intersezioni da

questi punti. Ciò posto, le semicirconferenze di raggio *cb* restano divise ciascuna in 20 archi disuguali, quelle di raggio *ce* in 200 archi disuguali.

A partire dal zero e dalle due parti della direttrice DE le divisioni della graduazione delle semicirconferenze *cb* si marcano coi numeri naturali da 1 a 20; le divisioni delle circonferenze *ce* di dieci in dieci si marcano coi numeri 100, 200, 300.... 2000.

Lettura delle graduazioni

(305). Ripetiamo che con l'aritmètro si misurano in archi 3° e duennesimi gli angoli che la linea di mira del canocchiale fa con la direttrice DE, ed i seni di questi angoli:

a) Nella circonferenza *ca* ciascun arco 3° sia diviso ad ipotesi in sedicesimi con quattro bisezioni successive.

b) Il disco graduato *d* gira col cannocchiale del quale la linea di mira trascina il zero delle graduazioni; consegue che coll'inclinarsi del canocchiale a destra o a sinistra della direttrice, i punti delle graduazioni uguali ed inverse, passano successivamente sotto al filo sottile *mn* di essa, e danno (Fig. 137ª D) con l'arco *ms* della circonferenza *ca* la misura dell'ang. ECF che la linea di mira CF fa con la direttrice DE.

c) L'arco *sm* abbracciato dall'ang. FCE sia di $36^\circ + \frac{7}{16}$; poichè $\frac{3^\circ}{16} = 0{,}1875$ così ang. FCE $= 36^\circ + 7 \times 0{,}1875 = 37^\circ, 3125$.

Può facilitarsi la lettura usando una tabella dei sedicesimi dell'arco 3° da $\frac{1}{16}$ a $\frac{15}{16}$ ridotti in cifre decimali.

d) Nell'apertura dello stesso ang. FCE $= 37^\circ{,}3125$, dei tratti diretti al centro che tagliano le tre circonferenze *cb*, *cd*, *ce*, vedasi più prossimo al filo *mn* della direttrice quello marcato 5 sulla circonferenza *cb*. Siano 8 i punti di divisione della circonferenza *cd* compresi fra il filo della direttrice ed il tratto 5. Siano $7\,{}^1/_2 = 7{,}5$ i millesimi che sulla circonferenza *ce* sono compresi tra il filo *mn* ed il primo dei tratti che tagliano simultaneamente le circonfe-

renze *cd*, *ce*; riunendo leggeremo seno 0,5875; talchè angolo FCE = = 37°,3125 = seno 0,5875.

306. Mediante i mirini a cerniera situati agli estremi della linea A.B, l'aritmètro può usarsi sia come *squadro agrimensorio*, sia come *falsa squadra*.

Uso dell'Aritmètro

307. (Fig. 102ª) *Misurare la distanza di un punto* s *da altro inaccessibile* x.

Si tracci una base *sm* che formi con la direzione *sx* un angolo arbitrario tanto più prossimo al retto quanto maggiore è la distanza del punto *x*. Si raccolga sulla *sm* la proiezione retta *p* del punto *x*. Risulti ad ipotesi *ps* = m.l. 72.65, si faccia stazione in *s* e con la linea base AB della aritmètro sulla direzione *sp*, si miri in *x*, e si legga il seno dell'angolo *x* che sia ad ipotesi 0,2346. Si risolva la proporzione 0,2346 : 72,65 : : 1 : *sx* ed avremo distanza $sx = \frac{72,65}{0,2346}$ = metri lineari 309,676

2. Per rilevare un poligono *abcd*... da riprodursi in disegno, fatta stazione in un punto *s* interno o esterno alla sua area, si misurano successivamente nel descritto modo le distanze da *s* dei suoi vertici *a*, *b*, *c*, *d*, ... nonchè gli angoli successivi formati dalle loro direzioni *asb*, *bsc*, *csd*, ...

308. (Fig. 126ª) *Dal vertice* b *misurare lati ed area del triang.* abd.

Sulle direzioni *ba*, *bd* si raccolgano in *p*, *q* le proiezioni rette dei vertici *a*, *d* ricavandone come sopra le lunghezze dei lati *ba*, *bd*, e letto sotto l'angolo *abd* sen. $_{baq}$ = sen. $_{bdp}$, l'area del triangolo sarà $A = \frac{ba \times bd}{2} \times$ sen. $_{baq}$ (274).

a) Quando le proiezioni rette *p*, *q* sui lati dai vertici opposti cadono troppo lontane dal vertice *b*, si misurano questi lati tracciando per ciascuno una base arbitraria come si è detto al (307).

309. (Fig. 129ª) Per misurare perimetro ed area di un poligono *abcdo* si fa stazione in un suo vertice *o* ovvero in altro punto in-

terno all'area del poligono, e misurate come sopra le distanze *oa'* *ob*, *oc*, *od* dei suoi vertici se ne deduce area $A = \frac{oa \times ob}{2} \times$ $\times$ sen. $_{aob} + \frac{ob \times oc}{2} \times$ sen. $_{boc} \times \frac{oc \times od}{2} \times$ sen. $_{cod.}$ ....

310. **Segnale duplo**

(Fig. 138ª A) Il *segnale duplo* si forma di due paline *pc*, *p'c'* a cartella, di altezza *db* dal centro di questa approssimativamente uguale a quella della lente del canocchiale dell'aritmètro in azione dal suolo. Nella parte posteriore delle paline e al disotto delle cartelle *c*, *c'* (Fig. 138ª B), sono fissate due asole *a* di forma rettangolare.

Nel centro *o* di una delle cartelle *c* delle paline è praticato un piccolo foro *o* traverso al quale passa esattamente un piccolo canocchiale *m n*; il sostegno *s* del canocchiale *m n* è fissato nella parte posteriore della cartella *c*, in modo che la linea di mira del canocchiale risulta perpendicolare al piano della cartella stessa.

(Fig. 138ª A, D) Un'asta (*trasversa*) T della stessa sezione delle asole metalliche *a* che devono abbracciarla, è destinata a collegare le due paline mantenendole alla distanza fissa di metri 4 tra i due centri delle cartelle *c*, *c'*. La trasversa si forma di due parti uguali *q*, *k* (Fig 138ªD) da collegarsi mediante la vite *v*. La trasversa in complesso di m. l. 4,20, si collega alle paline mediante i puntali *g* appesi al loro piede.

Uso del segnale duplo

311. Nel punto preso di mira dall'operatore, il suo assistente infigge nel suolo la palina *pc* che ferma quando la mira del suo canocchiale *m n* incontra la lente del canocchiale dell'aritmètro. Monta e collega la trasversa fissandone col l'ago *g* un estremo alla palina *p c* e l'altro alla palina *p'c'*.

Per questa disposizione la linea di mira del canocchiale dell'aritmètro cade perpendicolare in *c* alla linea dei centri *cc'* = m.l. 4 delle cartelle.

312. *Misurare direttamente dalla stazione* s *la distanza di un punto* a *accessibile al porta segnale.*

Nell'aritmètro la lettura della graduazione dà direttamente il seno dell'angolo csc' *che formano le linee di mira ai centri* c, c' *delle cartelle del segnale duplo,* e però l'assistente fissa nel descritto modo il segnale duplo nel punto *a*.

L'operatore fa collinare la mira del canocchiale con la direttrice fissa DE dell'aritmètro, mediante il rocchetto *r* gira il piano di questo finchè sotto la mira cade il centro *c* della cartella, quindi ruota il canocchiale finchè cade sotto la mira il centro della cartella *c'*, ed allora legge nella graduazione seno *a*. Risolve la proporzione sen. $_a$: 1 : : 4 : *sa* da cui distanza $sa = \frac{4}{\text{sen.}_a}$. Ossia col doppio segnale. *La distanza di un punto lontano* a *è il quoto di 4 per il seno dell'angolo formato dalle linee di mira ai centri delle due cartelle* c, c'.

a) Si osservi che quando la linea *c, c'* dei centri delle cartelle è inclinata all'orizzonte, anche il piano dell'aritmètro deve inclinarsi mediante la doppia snodatura a sfera *s* (Fig. 137ᵃB) finchè passa per la linea *c, c'*.

b) Per misurare lati ed aree dei poligoni si opera come ai superiori esempi, sostituendo per la misura delle distanze dei vertici dal punto di stazione, il metodo del segnale duplo descritto a quello dell'allineamento base (307).

Misurare l'altezza h *di una torre*

313. L'assistente fissa il segnale duplo al piede della torre e misura l'altezza *k* dal centro *c* della cartella al suolo; che risulti ad ipotesi $k = 1{,}22$.

L'operatore nota sen. $_{csc'}$ ad ipotesi $= 0{,}08$, quindi collocato verticale il piano dell'aritmètro mira con la linea base AB di esso il centro *c* della cartella, e col canocchiale la sommità *z* della torre; risulti seno $_{csz} = 0{,}5475$. Risolva la proporzione sen. $_{csc'}$: sen. $_{csz}$: : : : 4 : *cz* ossia 0,08 : 0,5475 : : 4 : *cz* » $cz = \frac{0{,}5475 \times 4}{0{,}08} = 27{,}375$; e

però altezza della torre $h = cz + k =$ m. l. 27,375 + 1,22 = m.l. 28,595.

313. (Fig. 118ª) *Misurare la distanza fra due punti inaccessibili* a, b.

Siano c', a'' le cartelle del segnale duplo. L'assistente colloca le paline del segnale sul prolungamento della direzione ab.

L'operatore annota sen. $_{c'o'a''} = m$ » sen. $_{c'o'a} = n$ » sen. $_{c'o'b} = r$; e risolve le proporzioni $m : n :: 4 : c'a$; da cui $c'a = p$, quindi $m : r :: 4 : c'b$, da cui $c'b = q$; perciò $ab = q - p$.

314. (Fig. 136ª) *Misurare l'area di un appezzamento di perimetro in tutto o in parte isosceliko.*

Siasi verificato come alla (Es. XI) che un dato perimetro è costituito parte di coppie isosceliche dirette o inverse, e parte di segmenti rettilinei.

Si marchino con biffe i punti $d, f, y, g, i \ldots$ nei quali i segmenti curvilinei restano divisi in linee isosceliche; quindi scelto un punto di stazione s dal quale siano visibili tanto i detti punti che i vertici del poligono, se ne misurano le rispettive distanze sia col metodo delle basi (307) sia con quello del segnale duplo. L'area dell'appezzamento si calcola facendo i semiprodotti delle distanze successive prese due a due e moltiplicate per il seno dell'angolo che esse formano, e ciò girando il perimetro nello stesso senso, come si espose alla (Es. XI), e prendendo la metà della somma dei detti semiprodotti pei rispettivi seni.

315. Riteniamo sufficentemente dimostrato che con l'aritmètro i rilievi dei terreni risultano facili, solleciti e che inoltre presentano il vantaggio di dare gli elementi di figure sempre riproducibili mediante la riga ed il compasso.

CENNO

SULLA CRONOGONIOMETRIA

La Cronogoniometria è la scenza di rappresentare ed operare con lo stesso carattere numerico tra spazi di tempo ed archi di circolo.

Suo fine è l'eliminazione dal calcolo delle difficoltà che s' incontrano nel ridurre l'una all'altra le dette quantità, e ciò assegnando loro una comune misura.

Fino ad oggi non si conosce un metodo di calcolo cronogoniometrico soddisfacente, e però esponiamo per sommi capi un sistema che sembraci corrispondente allo scopo.

I. — L'attuale misura degli angoli ed archi è la circonferenza divisa in 360 gradi. Il grado diviso successivamente per le potenze del 60, dà i minuti primi, secondi e terzi . . . Nella misura del tempo, la circonferenza rappresentante un'ora, è divisa in 60 parti o minuti primi. Un minuto primo diviso successivamente per le potenze del 60 dà i minuti secondi, terzi ecc,: talchè, assunta la circonferenza come unità, il grado $1^\circ = \frac{1}{360} = \frac{1}{60^2} \times 10$ » il minuto primo $1^{0\prime} = \frac{1}{60^3} \times 10$ » il secondo $1^{0\prime\prime} = \frac{1}{60^4} \times 10 \ldots$; ed in misura di tempo ora $= 1$ » minuto primo $1' = \frac{1}{60}$ » id. $1'' = \frac{1}{60^2}$ » » id. $1''' = \frac{1}{60^3}$ ecc. Nelle due misure, paragonando i minuti pri-

mi trovasi $1^{\circ\prime} : 1' :: \frac{1}{6'^3} \times 10 : \frac{1}{60}$; questa correlazione imbarazza il calcolo misto tra i due valori con quantità radicali.

É poi di somma importanza il poter rappresentare le operazioni miste tra archi e tempi con carattere grafico, cioè con figure geometriche costruite mediante la riga ed il compasso; ma ciò con gli attuali sistemi di misura riesce spesso impossibile, poichè non sappiamo dividere graficamente la circonferenza in 360°, nè il grado in 60 ecc., nè tampoco in misura di tempo possiamo dividere graficamente il minuto primo in 60, nè il secondo in 60, ecc.

Nella graduazione della circonferenza per 360° e divisione decimale del grado in minuti primi, secondi ecc., non possiamo graficamente dividere nè la circonferenza in 360°, nè il grado in 10 parti uguali.

Lo stesso avviene per la circonferenza graduata con sistema decimale, non potendosi graficamente dividere nè il quadrante per 100°, nè una di queste parti per 10.

Esponiamo sommariamente un sistema nel quale sono rimosse le suddette difficoltà, inquantochè

1. *Una sola graduazione della circonferenza è comune misura degli angoli ed archi, nonchè dei tempi ad essi equivalenti.*

2. *Tale graduazione si eseguisce mediante la riga ed il compasso ed è perciò rigorosamente esatta.*

3. *La stessa graduazione diversifica di poco da quella in uso nel goniometro e cronometro, e in modo da rendere più rigorosamente esatta la costruzione di questi istrumenti.*

4. *Nel calcolo si possono sostituire gli uni agli altri gli angoli e tempi.*

5. *Tutte le operazioni eseguite fra le due diverse quantità, possono rappresentarsi con figure geometriche costruite mediante la riga ed il compasso.*

Poichè nella cronogoniometria angoli e tempi hanno una sola misura, i **cronometri** divengono **cronogoniometri** ed i **goniometri** si trasformano in **goniocronometri**.

II. *Graduazione del Goniocronometro*

(Fig. 139ª) Due circonferenze concentriche *ca* > *cb* sono destinate la prima alla misura degli angoli (*goniometro*), la seconda alla misura del tempo (*cronometro*)

Con i metodi geometrici si gradui la circonferenza *ca* per archi 6°; essa resta divisa in 60 archi che si distinguono ordinatamente col numero 6° e suoi multipli per i numeri in ordine naturale da 6° a 360°.

Detti archi 6° si bisecano successivamente finchè lo permette la chiara lettura.

Dai punti 6°, 12°, 18° . . . 360° si tracciano altrettanti segmenti diretti al centro; questi, incontrando la circonferenza *cb* del cronometro, la dividono in 60 archi uguali, ossia minuti primi, che a partire dal zero, corrispondente al 360° della circonferenza *ca*, di cinque in cinque si distinguono con i numeri 5 e suoi multipli per i numeri in ordine naturale dà 5 a 60.

Nel calcolo cronogoniometrico si adotta l'arco 6° come minuto primo, ossia 1°' della circonferenza; talchè, tanto il circolo del goniometro quanto quello del cronometro, restano divisi in 60 minuti primi.

Le bisettrici successive sono comuni ai due archi corrispondenti 6° = 1°' ed 1'. La prima bisettrice $\frac{1'}{2} = \frac{6^0 = 1^{0\prime}}{2} = 3^\circ$, dà ancora l'arco intero 3° unità geometrica degli angoli ed archi (7).

Le bisettrici successive dividono i minuti primi nei due circoli in 4, 8, 16, 32, 64 . . . 2^n parti uguali.

Una qualunque di tali parti può assumersi come minuto secondo; così sia adottato quale minuto secondo 1°" l' arco dato dalla sesta bisettrice dell' arco (6° = 1°') = 1', e cioè $= \frac{6^\circ}{2^6} = \frac{1^{0\prime}}{2^6} = \frac{1'}{2^6} = \frac{1}{64}$, ed allora nelle due circonferenze *ca*, *cb*, divisi i loro sessantesimi con sei bisettrici ciascuno in 64 parti, una di queste è il rispettivo minuto secondo 1°" = 1", il quale

in misura di tempo ridotto in valore decimale è $\frac{1'}{64} = 0',015625$, ed in valore decimale in gradi è $\frac{6^0}{64} = \frac{1' \times 6^0}{64} = 0^0,09375$.

Sei bisettrici successive dell'arco 1", danno nella sua sessantaquattresima parte il minuto terzo $1''' = \frac{0',015625}{64} = 0',000244140625$, che moltiplicato per 6^0 si riduce al corrispondente valore angolare in gradi e cioè $1^{0'''} = 0',000244140625 \times 6^0 = 0^0,00146484375$.

Sei bisettrici del minuto terzo danno il minuto quarto 1'''' ecc.

Disposizione del Cronogoniometro

Nel cronogoniometro (orologio) la circonferenza *ca* è graduata per minuti primi e mezzi minuti con 120 archi 3^0.

Nell'area del circolo *ca* sono tre piccole circonferenze A, B, D divise con bisettrici successive ciascuna in 64 archi uguali e destinate alla misura dei minuti secondi, terzi e quarti.

Un sistema d'orologeria muove gl' indici dei vari quadranti.

Come negli orologi in uso, nel circolo *ca* sono due indici: uno gira la circonferenza in dodici ore, e segna l'ora per ogni arco di 5 minuti primi, l'altro gira la circonferenza in un'ora e segna i suoi 60 minuti primi. L' indice del circolo A ne gira la circonferenza in un minuto primo e dà i suoi sessantaquattresimi ossia secondi. L'indice del circolo B gira la sua circonferenza in un secondo e dà con i suoi sessantaquattresimi il minuto terzo ecc.

Nel goniocronometro, per ottenere la chiara lettura della graduazione, può applicarsi il sistema descritto per il cronogoniometro. In tal caso il movimento del meccanismo è trasmesso da un asse centrale al quale è saldato il sostegno del canocchiale in modo che la linea di mira di questo, sia o no inclinata all'orizzonte, con la sua rotazione mette in movimento il meccanismo.

Con questo sistema si possono misurare con la massima esat-

tezza archi piccolissimi o frazionari espressi da numeri di molte cifre decimali. Il valore di tali archi è sempre finito ed essi sono graficamente riproducibili mediante la riga ed il compasso.

Per la circonferenza divisa in 60 minuti primi, e questi successivamente per le potenze del 64 in secondi e terzi ..., tanto nel goniocronometro quanto nel cronogoniometro la graduazione è la medesima, quindi possono usarsi indifferentemente tanto nelle misure degli angoli che dei tempi.

Gl' indici di uno di essi segnino 2, 15', 11", 14'''; in misura di tempo si scriverà 2°, 15', 11", 14'''; e in misura angolare $C^{o}.2$, 15°', 11°", 14°''', i due valori sono equivalenti; però dovranno rispettivamente ridursi a numero decimale onde diano una idea concreta dei valori stessi. Allo scopo i termini di ambedue si riducono a minuti primi e decimali di questi, facendo per il tempo $2.^{o}$, 15', 11". 14''' $= 2 \times 60 +$

$$+ 15' + 11 \times \frac{1'}{64} + 14 \times \frac{1'}{64^2} = 120' + 15' + 11 \times 0',015625 +$$

$+ 14 \times 0',000244140625 =$ minuti 135',17529296875 (T), e per l'angolo $C^{o}.2$, 15°', 11°", 14°''' $= 135',17529296875 \times 6^{o} = 811^{o},0517578125$ (A) angolo girato, inquantochè nel goniometro riferito alla graduazione in 360°, il minuto 1°' $= 6^{o}$. Quindi, sebbene i valori T. A siano equivalenti pure i numeri decimali che li esprimono stanno come 1 a 6.

Per rimuovere questa disuguaglianza di espressione decimale delle due quantità, dobbiamo considerare che se non ci è permesso di alterare l'espressione numerica del valore angolare vincolato alla graduazione della circonferenza in 360°, possiamo però supporre, senza alterazione del valore relativo al tempo, che un minuto primo dell'ora sia al pari di quello angolare diviso in 6 parti uguali, ed allora avremo

T $= 811',0517578125 =$ ang. A $= 811^{o}',0517578125$ ossia anche in numero decimale T $=$ A.

Finalmente per liberare il calcolo dalla riduzione in decimali dei minuti primi secondi... possono formarsi le tavole cronogoniometriche che seguono.

Tavole decimali cronogoniometriche (*C.g m*)

Tempo.	Angolo	Tempo.	Angolo	Tempo.	Angolo
1' =	6° = 1°	1" =	0',09375 = 1°'	1''' =	0',00146484375 = 1° '''
2' =	12° = 2°	2" =	0',1875 = 7°'	2''' =	0',0029296875 . = 2° '''
3' =	18° = 3°	3" =	0',28125 = 3° "	3''' =	0',00439453125 = 3° '''
4' =	24° = 4°	4" =	0',375 . . = 4° "	4''' =	0',005859375 . . = 4° '''
5' =	30° = 5°	5" =	0',46875 = 5° "	5''' =	0',00732421875 = 5° '''
6' =	36° = 6°	6" =	0',5625 . = 6° "	6''' =	0',0087890625 . = 6° '''
7' =	42° = 7°	7" =	0',65625 = 7° "	7''' =	0',01025390625 = 7° '''
8' =	48° = 8°	8" =	0',75 . . . = 8° "	8''' =	0',01171875 . . . = 8° '''
9' =	54° = 9°	9" =	0',84375 = 9° "	9''' =	0',01318359375 = 9° '''
10' =	60° = 10°	10" =	0',9375 . = 10° "	10''' =	0',0146484375 . = 10° '''
11' =	66° = 11°	11" =	1',03125 = 11° "	11''' =	0',01611328125 = 11° '''
12' =	72° = 12°	12" =	1'.125 . . = 12° "	12''' =	0',017578125 . . = 12° '''
13' =	78° = 13°	13" =	1',21875 = 13° "	13''' =	0',01904303375 = 13° '''
14' =	84° = 14°	14" =	1',3125 . = 14° "	14''' =	0',0205078125 . = 14° '''
15' =	90° = 15°	15" =	1',40625 = 15° "	15''' =	0',02197265625 = 15° '''
» » »		» »	» » »	» » »	» » »
60' =	360°	» »	» » »	» » »	» » »
		» »	» » »	» » »	» » »
		» »	» » »	» » »	» » »
		» »	» » »	» » »	» » »
		64'	= 6' = 1°'	64''' =	0',09375 . . . . = 1° "

La tavola dei minuti primi si forma moltiplicando 6° per i numeri in ordine naturale da 1 a 60; quella dei secondi, terzi ... moltiplicando il valore decimale angolare di un secondo, di un terzo ecc. per i numeri in ordine naturale da 1 a 64.

L'uso delle tavole si riduce nel segnare in colonna i valori corrispondenti ai termini indicati dagli indici sulla graduazione, la somma di questi è l'espressione del valore decimale angolare o di tempo indicato.

Si dispone il calcolo come a lato (Tab. N).

2_0, 15', 11", 14'''			Tab. N.
2_0 = 2 × 360°	= 720°		
15' =	= 90°	(Dalle tavole)	
11" =	= 1_0,03125	id.	
14'''=	= 0_0,0205078125	id.	
Ang. girato			811°,0517578125

Per brevità l'espressione *G.c.m.* indica il goniocronometro e quella *C g m* il cronogoniometro.

Il numero delle cifre de-

cimali da assegnarsi al valore del minuto secondo, deve essere regolato dall'uso dal quale si destina il *G.c.m.*; così se questo deve impiegarsi nelle operazioni trigonometriche basta che il minuto secondo sia espresso da numero a 4 decimali, ma se poi fosse destinato ad operazioni astronomiche, nelle quali necessita talora di avanzare il calcolo fino ai minuti quarti e quinti, allora è più conveniente esprimere il secondo con numeri a sei decimali ossia $1^{0''} = \frac{1^{0'}}{64} \times 6 = 0{,}09375$.

Qualunque sia il duennesimo del minuto adottato come secondo, la formazione delle tavole è identica alla descritta. Sia ad ipotesi $1'' = \frac{1}{16} = 0',0625$; in valore angolare avremo $1^{o''} = 0{,}0625 \times 6^{o} =$ $= 0^{o}\ 375$; ed il minuto terzo sarà $1^{o'''} = \frac{0^{o},375}{16} = 0^{o}.0234375$.

Moltiplicati questi due termini per i numeri naturali da 1 a 64, ne restano formate le rispettive tavole.

III. Il calcolo cronogoniometrico si divide in due parti distinte e cioè:

1. Nel *calcolo misto*, il quale si serve di tutti i mezzi che offrono l'aritmetica e gli altri rami del calcolo per operare tra dati valori angolari e di tempo, come se fossero quantità della stessa spece.

2. Nel *calcolo geometrico* che si serve della geometria nei suoi vari rami e facoltà, sia nella rappresentazione grafica delle figure corrispondenti alle operazioni miste eseguite tra angoli e tempi, sia nell'analizzare le correlazioni e rapporti che passano fra gli elementi costituenti dette figure, tanto in sè stesse quanto riferite ad altre della stessa spece.

Vedesi da ciò che questo ramo della scenza, il quale potrebbe riuscire assai utile nella fisica, nella meccanica e segnatamente nella astronomia, si svilupperebbe in un esteso trattato: pertanto qui ci limitiamo a darne un' idea assai sommaria.

Calcolo misto

Poichè nel calcolo anche i tempi sono espressi da numeri decimali angolari, nelle operazioni miste deve aversi presente quanto dicemmo intorno agli angoli nella parte prima di questo libro.

Aggiungiamo che se un angolo girato o spirale si forma di un numero intero n di circonferenze C, si rappresenta nella forma angolo Cn. Quando l'angolo girato oltre le n circonferenze contiene un angolo $a \lessgtr 360^0$, si rappresenta col segno $Cn+a$, e graficamente si costruisce l'angolo $a<360^0$ e si segna Cn dentro la sua apertura se $a < 180^0$, ovvero prossimo al vertice ed esterno all'angolo se $a > 180^0$.

Un angolo girato intero e dispari b può essere base (9) di altri angoli girati ovvero d'infiniti angoli non girati frazionari e fratti, e però quando da un angolo base e girato b voglia ricavarsi quello a dal quale proviene, devono essere note le n bisezioni successive di b che riconducono a quello a, allora avremo $a = \frac{b}{2^n}$

Ad esempio si richieda espresso in ore e minuti primi, secondi e terzi il decorso di tempo t, il quale duplicato per 8 volte successive, ha generato l'angolo base girato 662259^0. Avremo $\frac{662259^0}{2^8=256} =$ $= 2586^0,94921875$.

Per la parte intera faremo $\frac{2586^0}{360^0} = 7_0 + 66^0 \gg \frac{66^0}{6^0} = 11'$.

Per la parte fratta si cerchi nella tavola *C.g.m* colonna dei secondi, il massimo termine in essa contenuto, e si trovi $0',94921875 = 10'' = 0',9375 + 0',01171875$. Si veda se questo resto è tra i termini della colonna dei minuti terzi, e si trovi $0',01171875 = 8'''$ e riunendo ordinatamente avremo $t = 7_0,\ 11',\ 10'',\ 8'''$.

Poichè un angolo ed il tempo ad esso equivalente sono espressi dallo stesso numero decimale, consegue che le operazioni aritmetiche miste si eseguiscono come quelle ordinarie, sia che i due valori siano dati sotto forma di numeri concreti complessi che sotto forma di numeri decimali.

Vedonsi a lato in A.B due esempi della somma mista tra angoli e tempi tanto sotto forma di numeri concreti e complessi, quanto sotto quella di numeri decimali; e sotto le due forme diamo esempi di sottrazione in C.D.

Riteniamo superfluo dare anche esempi di operazioni miste, sulla moltiplicazione, divisione, proporzioni, progressioni, serie di potenze ed estrazioni di radici, per le quali tutte rimandiamo a quanto fu precedentemente svolto circa alle stesse operazioni tra i numeri esprimenti valori angolari. Daremo un solo esempio che sia di norma nelle applicazioni dei richiamati principii nelle operazioni miste.

5°', 27°", 12°''' 37°', 16°", 32°''' 7', 16", 18''' 19', 0", 23''' 68', 60", 21''' = 413°,65576171875	Somma A
32°',548828125 223°',546875 43',5263671875 114',03369140625 413°,65576171875 = 68', 60", 21'''	Somma B
37°', 16", 32°''' — 7', 16", 18''' 30', 0", 14''' = 180°,0205078125	Sottrazione C
223°,5468750000 — 43',5263671875 180°,0205078125 = 30', 0", 14'''	Sottrazione D

Si domandino tutti i divisori interi possibili del decorso di tempo 5°, 28', 60", 32''', si riduca in valor decimale all'ang. girato 1973°, 471875 di angolo base 126315°. Decomposto quest'angolo base nei suoi fattori primi trovasi $126315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 401$. Si moltiplichino questi fattori primi tra loro in tutti i modi possibili, ne' risulteranno i divisori esatti ed interi del tempo 5°, 28', 60", 32''', e cioè 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63. 105 315, 401, 1203, 2005, 2807, 3609, 18045, 25263.

Infatti, dividendo il dato tempo per uno qualunque dei detti divisori, si ottiene per quoto un angolo costruibile riducibile a tempo equivalente esatto, così faremo ad ipotesi $\frac{5°, 28', 60", 32'''}{2807}$ = angolo $\frac{1973°, 671875}{2807} = 0°,703125$, che mediante le tavole *C.g.m*, si riduce al tempo equivalente 0°, 0', 7", 32'''.

Quando poi si fossero ricercati tutti i divisori possibili esatti interi, frazionari o fratti del tempo 5°, 28', 60", 32"', come si espose al (13) tutti i duennesimi all'infinito dei suoi divisori interi determinati come sopra, nonchè le combinazioni di tali duennesimi per somma differenza prodotto o quoto, risulterebbero altrettanti divisori esatti dell'angolo 1973°, 671875 e perciò anche del tempo equivalente 5°, 28', 60", 32"'.

Inoltre la teoria svolta sui valori angolari talora semplicizza la soluzione di alcuni problemi: ne diamo un esempio.

Suppongasi che un corpo percorra nello spazio la circonferenza secondo l'ipotetica legge *delle potenze dei tempi divise ordinatamente per le potenze degli archi, ovvero secondo i multipli per* p *di una o l'altra o di entrambi le serie di potenze,* e cioè con la velocità crescente $v = \frac{t^n}{a^n}$, ovvero $v = \frac{pt^n}{a^n}$ e anche $v = \frac{t^n}{pa^n}$ ecc. ove t è il momento corrispondente all'arco a. Si verifichi che il corpo traversando un mezzo resistente sfugga alla suddetta legge, e invece in tempi uguali percorra archi dei quali il valore numerico cresce ordinatamente di una cifra decimale, o viceversa percorra archi ugual idei quali i tempi successivamente corrispondenti sono espressi da numeri che crescono ordinatamente di una cifra decimale, si domanda come la resistenza r del mezzo abbia modificato la legge prima di velocità del corpo.

Possono darsi più casi, dei quali per essere brevi ne considereremo due, e cioè quando il corpo traversando il mezzo percorre in tempi eguali archi graficamente costruibili, ovvero percorra archi uguali in tempi dati da numeri che non sono espressione di archi costruibili.

1. Penetrando nel mezzo resistente il corpo percorra in tempi uguali gli archi 1°,5 » 2°,25 » 3°,375 » ... Essendo uguali i momenti li rappresenteremo sotto la forma $\frac{1}{1°,5}$ » $\frac{1}{2°,25}$ » $\frac{1}{3°,325}$. Riducendo all'angolo base i successivi denominatori angolari avremo $\frac{2}{3°}$ » $\frac{4}{9°}$ » $\frac{8}{27}$ » ... serie frazionaria crescente nella quale numeratori e denominatori procedono come le potenze di numeri in-

teri e però secondo la legge prima $v = \frac{t^n}{a^n}$ che regola il corpo al di fuori del mezzo resistente. Pertanto, traversando questo mezzo, il corpo procede con la velocità modificata $vr = \frac{1}{3^o : 2}$ » $\frac{1}{9^o : 4}$ » » $\frac{1}{27^o : 8}$ » . . . $= \frac{3^o}{2}$ » $\frac{9^o}{4}$ » $\frac{27^o}{8}$ » . . . serie frazionaria decrescente costituita dei termini della prima inversamente disposti, *quindi la resistenza del mezzo ha invertita la legge prima e avremo* $vr = \frac{a^n}{t^n}$.

2. *Il corpo traversando il mezzo resistente percorra invece archi uguali in tempi progredenti* 4,2 » 5,88 » 8,232 » . . .

Considerando i tempi come archi non costruibili e per essere uguali gli archi, scriveremo $\frac{1}{4,2}$ » $\frac{1}{5,88}$ » $\frac{1}{8,232}$ » . . . . Si cerchi fra le cifre semplici quel numero che moltiplicato per il primo termine ne rende intero il denominatore, ossia $\frac{1}{4,2} \times 5 = \frac{5}{21}$, ed allora si moltiplichino i termini successivi della serie ordinatamente per le potenze del 5: avremo $\frac{5}{21}$ » $\frac{25}{147}$ » $\frac{125}{1029}$ » . . . serie nella quale i denominatori sono espressioni di angoli costruibili come multipli di tre. Si scriva la serie sotto la forma $\frac{5}{3 \times 7}$ » $\frac{25}{3 \times 49}$ » » $\frac{125}{3 \times 343}$, e in questa i denominatori procedono come il triplo delle potenze del 7, mentre i numeratori come le potenze del 5: ne dedurremo legge prima $v = \frac{3.t^n}{a^n}$ e legge seconda $vr = \frac{a^n}{3.t^n}$.

È superfluo trattenerci più a lungo sul calcolo misto il quale sempre facile ed elementare, è in tutto uguale al calcolo aritmetico in virtù della convenzione di rappresentare angoli e tempi con gli stessi numeri decimali; pertanto ciò non ci deve far dimenticare che angoli e tempo sono quantità distinte, poichè i primi sono 360mi, mentre i secondi non sono che 60mi della circonferenza, che senza la citata convenzione di ritenere il minuto primo anche esso di-

viso in 6 parti uguali al pari di quello angolare, ci renderebbe impossibile di rappresentare con angoli costruibili tutti quei spazi di tempo, che espressi per minuti primi, non hanno in sè stessi la forma di angoli costruibili.

III. *Grafica cronogoniometrica*

La grafica cronogoniometrica ossia calcolo cgm consiste nel rappresentare con figure geometriche operazioni eseguite o progettate tra angoli e tempi, o linee e tempi ovvero fra diversi spazi di tempo considerati come lunghezze aventi due a due un punto comune ed una assegnata scambievole inclinazione, e però

Nel calcolo *cgm* si considerano le linee, gli angoli o ambedue questi elementi come esprimenti spazi di tempo,

Vedemmo già come nelle figure geometriche gli angoli possono rappresentare altrettanti tempi in virtù dello stesso carattere numerico; vediamo ora dentro qual limite, nelle stesse figure, anche le linee possono rappresentare durata di tempo.

Nel significato geometrico e grafico la linea è una lunghezza generata da una successione ininterrotta di punti geometrici o grafici (262), si sostituiscano a questi punti generatori *i momenti*, e alla lunghezza *la durata del tempo*, e allora la linea geometrica o grafica si cangia nella *linea* cgm.

Come la lunghezza di una linea geometrica è relativa a quella di un assegnata unità di misura, così la lunghezza di una linea *cgm* è relativa a quella della assegnata unità di misura *cgm*.

a) La lunghezza assegnata alla unità lineare cgm *è arbitraria al pari di quella geometrica, però gli elementi costituenti una data figura* cgm *vanno riferiti alla stessa unità.*

b) Due o più figure cgm *geometricamente uguali, sono tali se misurate dalla stessa unità, se riferite a diverse unità* cgm, *sono simili a cagione della ugual forma e diverso valore dei lati.*

c) Due o più figure gcm *geometricamente simili, se misurate dalla stessa unità* cgm *sono simili, se misurate da unità che siano nello stesso rapporto di due loro lati omologhi sono equivalenti.*

d) Come unità lineare cgm *si adotta il raggio del circolo* cgm *ovvero* gcm ; *quale raggio come dicemmo è di lunghezza arbitraria, e può determinarsi tanto più grande quanto maggiori sono le distanze o durate di tempi che debbonsi rappresentare ;* così ad esempio per le operazioni astronomiche potrebbe adottarsi come unità il raggio del circolo equatoriale terrestre.

I descritti metodi cronogoniometrici di misura sia degli angoli sia dei tempi, sono in tutto corrispondenti a quelli attualmente seguiti per le figure geometriche, e poichè gli angoli *cgm* sono tutti costruibili mediante la riga ed il compasso (I.5°) così:

1. *Qualsiasi quantità ed operazione cronogoniometrica può rappresentarsi con una figura geometrica.*

2. *La cronogoniometria con le sue operazioni abbraccia l' intera geometria.*

Pertanto se la cronogoniometria può avvantaggiarsi di tutte le facoltà della geometria, ne divide anche le deficenze, poichè come in questa tra i segmenti rettilinei *cgm* e gli archi non esiste comune misura.

Infatti se il raggio unitario *cgm* si ritiene diviso al pari dell'ora e sue parti date in numeri decimali dalle tavole *cgm*, allora evidentemente qualsiasi segmento rettilineo rappresentante decorso di tempo è esattamente misurabile, per essere commensurabile con la unità. In tal caso però i segmenti rettilinei *cgm*, riferiti alla circonferenza, non si trovano numericamente nei rapporti di quelli omologhi geometrici nel circolo di raggio unitario, ed il calcolo geometrico per applicarsi alle linee *cgm*, diverrebbe assai complicato.

Se poi il raggio *cgm* si ritiene diviso al pari di quello unitario geometrico per le potenze del 10, allora non esiste comune misura tra il tempo ed i segmenti rettilinei Non deve inoltre dimenticarsi che i segmenti nel circolo unitario computati in parti di raggio, possono esprimere tutti i numeri immaginabili dei quali gran parte sono indefiniti o irrazionali, e perciò incommensurabili col raggio; ad esempio i lati dei poligoni regolari iscrittibili, escluso quello dell'esagono regolare, sono tutti incommensurabili col raggio e però

indefiniti o irrazionali: quindi, dato pure che il raggio *cgm* sia diviso al pari dell'ora, sempre i lati dei poligoni regolari *cgm*, non che tutti gli altri segmenti al pari di essi indefiniti o irrazionali, restano incommensurabili col raggio, cioè questi segmenti non possono rappresentare con rigore matematico un decorso finito di tempo, ma solo con approssimazione senza limite.

Per le svolte ragioni riteniamo che nelle applicazioni della geometria alla cronogoniometria, si debbano usare ambedue i metodi di divisione del raggio unitario *cgm*, secondochè la natura dei problemi da risolversi indichi più opportuna l'una o l'altra divisione. Nella scelta tra i due modi può solo servire di guida il sano criterio avvalorato dalla pratica.

Potrà usarsi per le figure *cgm* nel loro insieme e nelle rispettive parti, la nomenclatura di quelle geometriche corrispondenti. Così due o più linee *cgm* potranno essere rette o curve, regolari o no, spezzate o miste; potranno essere fra loro perpendicolari oblique, secanti, parallele, convergenti, divergenti.... L'angolo *cgm* sarà retto. acuto, ottuso, girato, rettilineo, curvilineo, isoscelico o no.... Due o più angoli *cgm* potranno essere tra loro uguali o no, complementari, supplementari, esplementari, ovvero essere riconosciuti tali per posizione scambievole dei lati al pari dei geometrici. Un triangolo *cgm* sarà retto, acuto, ottuso, equilatero isoscele, scaleno, isoscelico regolare o no; e in genere qualunque poligono *cgm* potrà nominarsi nel suo insieme e nelle sue singole parti con i termini adottati per quello geometrico che lo rappresenta.

Tutte le correlazioni, proprietà e principii inerenti alle varie figure geometriche, si estendono senza eccezione alle cronogoniometriche, e però a volerne trattare in dettaglio bisognerebbe ripetere quanto si è fino ad oggi scritto sulla geometria; ciò risulterebbe più che superfluo inutile, però ci limitiamo ad alcuni esempi che servano a guidare nella applicazione della geometria alla cronogoniometria.

IV. *Esempi pratici*

Unico scopo degli esempi seguenti è il dimostrare come la geometria si applichi direttamente nelle operazioni *cgm*, e poichè non vogliamo invadere altri campi della scenza, così i soggetti dei quesiti che ci proporremo, sono del tutto immaginari, come immaginarie sono le velocità attribuite ai corpi, le leggi che ne ne regolano il moto e simili. Di ciò avvertiamo il lettore al doppio scopo che non ci faccia un addebito di queste volute inesattezze, ne cada in equivoco ritenendo i valori immaginari come esatti.

Nelle operazioni *cgm* per la misura dei seni degli angoli dati per direzione dei lati si fa uso del Aritmètro, però quando sia possibile, per semplicizzare le operazioni è preferibile servirsi di un Goniocronometro nel disco del quale sia stata aggiunta la circonferenza graduata secondo l'Aritmètro (304).

ESEMPIO I. — Sia R raggio del circolo equatoriale terrestre l'unità *cgm*, e siasi riconosciuto che la luce per giungere dal pianeta A alla terra impiega 0°, 0', 0'', 16''', 6'''', 25''''' e dal pianeta B alla terra impiega 0°, 0', 0'', 10''', 10'''', 32''''': domandasi la distanza dei due astri dalla terra e fra loro, nonchè l'area del triangolo che le visuali agli astri formano con la congiungente i loro centri, sapendosi che la luce percorre la lunghezza del raggio R nel tempo $\frac{1'''}{32}$. D.

Mediante le tavole decimali *cgm*: sufficentemente avanzate ai minuti quarti, quinti ecc., si faccia la somma dei numeri decimali corrispondenti ai valori delle distanze da A e B. Si dividano i totali per il decimale corrispondente al valore di R = D; risulterà distanza dalla terra all'astro A = SA = R.512,50 e dalla terra all'astro B = = SB = R.315,25. Mediante l'aritmètro si misuri angolo e seno ASB, e si riproduca in rapporto di scala l'ang. ASB.

La distanza AB fra i due pianeti si misura direttamente mediante la scala, ovvero si calcola nei modi noti geometrici mediante

gli elementi noti SA, SB, ang. ASB, sen.$_{asb}$. L'area del triangolo ABS è $H = \frac{SA \times SB}{2} \times \text{sen.}_{asb}$.

Dato il raggio unitario cgm = R *diviso per le potenze del 10 tutte le linee riferite al circolo* cgm *si misurano come i segmenti omologhi nel circolo di raggio* 1. Così per i lati di poligoni regolari iscritti, avremo lato del triangolo equilatero *cgm*. $L = R\sqrt{3}$ » Id. del quadrato *cgm*. $L' = R\sqrt{2}$ » Id. del pentagono $L'' = R \times 1{,}1756$ » » Id. dell'esagono $L''' = R$: ecc.

L'area A di un poligono regolare *cgm* di *n* lati è data dalla formula geometrica $A = \frac{n R^2}{2} . \text{sen.} \frac{360^\circ}{n}$ (274). Per l'area del circolo *cgm* nella detta formula *n* è infinito.

Ricordiamo ancora che l'area di un poligono regolare di *n* lati nel circolo di raggio 1 è data numericamente dal semiperimetro del poligono di $\frac{n}{2}$ lati.

ES. II. — In un'ora si percorrono m. l. 3250. Il raggio *cgm* = = R si percorre in 0°, 24', 8". Domandasi quanti metri sviluppa il perimetro del dodecagono regolare *cgm*, quanto tempo occorre a percorrerne il perimetro, e quale è la misura della sua area.

Trovasi dalle tavole *cgm*, R = ang. 144°,75 quindi 360° : 144°,75 : : : m. l. 3250 : R » $R = \frac{3250 \times 144{,}75}{360}$ = m. l. 1306,7708(33). Nel circolo di raggio 1 il lato del dodecagono è 0,5176, e però $L = 0{,}5176 \times$ $\times$ 1306,7708(33) = 676°,3845831608; e però sviluppo del perimetro $p =$ = 676,3845831608 × 12 = m. l. 8116,6149979296.

Per determinare il tempo occorrente a percorrere il perimetro faremo m. l. 3250 : 8116,6149979296 : : 360° : *t*, da cui $t = \frac{8116{,}6149979296}{3250}$ = ang. 899°,0711997688172, che mediante le tavole *cgm* si riduce all'ang. C_2, 179°', 0°", 48°"', e questo ridotto al tempo corrispondente dà 2°, 29', 54", 5"'.... Per la misura dell'area A, poichè l'angolo al centro *n* del dodecagono è 30° e seno $_{30^\circ}$ = 0,50, avremo $6 \times R^2 \times 0{,}50 = \frac{6}{2} \times 1707650{,}398090863889$ = metri quadrati 5122951,194272591667....

Nello svolto esempio le misure metriche del raggio *cgm* è della quadratura del dodecagono *cgm*, nonchè il tempo occorrente a percorrere il perimetro del poligono, sono ottenute per approssimazione non essendovi comune misura tra il percorso di ore 1 = m. l. 3250 ed il tempo occorrente a percorrere il raggio R = = 0o, 24', 8".

ES. III. — Un battello a vapore con celerità uniforme segue per ore 1o, 6', 8", la direzione *ab* e per ore 2o, 10', 9" la direzione *bd* perpendicolare in *b* alla *ab*; quanto tempo occorre per percorrere il raggio R della circonferenza *cgm* passante per i punti *a*, *b*, *d*?

Poichè il triangolo *abd* è rettangolo, avremo $ad = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bd}^2}$ e $R = \frac{ad}{2}$; perciò ridotti al valore angolare decimale i lati *ba*, *bd*, la metà della radice della somma dei loro quadrati sarà il raggio R, il quale risulterà o no commensurabile coi lati, secondochè la somma $\overline{ba}^2 + \overline{bd}^2$ risulti o no quadrato perfetto, del quale cioè la radice sia numero finito.

ES. IV. — Sia raggio R = m. l. 125. Siano le dodici ore meno 0o, 5', 8"; decorso uno spazio di tempo il cronometro indichi ore 0o, 7', 4". Calcolare la lunghezza metrica dei lati del triangolo iscrittibile nel circolo *cgm* di raggio R del quale l'angolo al vertice sia dato dalla somma 0o, 5', 8" + 0o, 7', 4". Dalle tavole *cgm* in valore decimale angolare avremo 0o, 5', 8" = 30°,75 e 0o, 7', 4" = = 42°,375, somma ang. 73°,125.

(Fig. 3ª c). Con l'allineamento *hn* si faccia ang. *nhr* = 30°,75 ed ang. *nhm* = 42°,375: si formi ang. *ahg* = *nhr*. Sulla *hg* si prenda *hc* = m. l. 125 = R. Sull'allineamento *hm* si raddoppi in *a* la proiezione retta del punto *c*: per *a* si abbassi *ap* perpendicolare alla *hn* prolungandola ad incontrare in *b* l'allineamento *hr*; sarà *ahb* il voluto triangolo, del quale i lati si misurano direttamente o secondo i noti modi geometrici.

Infatti nel triangolo l'angolo al vertice è somma dei due tempi dati e *ch* = R. Per essere ang. *nhb* = *ahc*, questi sono derivati inversi del vertice *h* e perciò *hg* è direzione del diametro del circolo cir-

coscritto al triangolo del quale h è vertice e c centro; ma per la doppia proiezione ha dal centro c sull'allineamento hm, il triangolo hca è isoscele ossia $ca = ch =$ R raggio; conseguentemente la perpendicolare ap al lato hn del derivato h, incontrando la direzione hr completa il triangolo ahb iscrittibile nel circolo cgm di raggio $ch =$ R.

I principii geometrici, che in parti di raggio danno i prodotti e quoti dei segmenti riferiti al circolo di raggio 1, *si estendono alla cronogoniometria.*

ES. V. — In due ore si percorra il raggio R = m. l. 3000 e due distanze ab, de si percorrano la prima in ore 1o, 48', 4", la seconda in 0o, 49', 8". Con un segmento lineare vuole rappresentarsi la terza potenza del prodotto $ab \times de$.

Dalle tavole cgm avremo R=720° » ab=648,375 » de=294,75; quindi

$720 : 648{,}375 :: 1 : ab$ » $ab = \frac{648{,}375}{720} = 0{,}9005$; $de = \frac{294{,}75}{720} =$

$= 0{,}4094$: da cui $ab \times de = 0{,}3687$. (Fig. 24ª A). In rapporto di scala sia $co =$ R m. l. 3000. Si descriva la circonferenza, si prenda in parti decimali del raggio co segmento $o1' = 0{,}3687$ e si porti come corda in $o1'$; si abbassi alla co la perpendicolare $1'h$ e si prenda $h2' = ho$: si faccia corda $o2 = o2'$, si tracci la 2.1' e si abbassi a questa raddoppiandola in 3' la perpendicolare da o; e per quanto fu dimostrato al (125) risulterà in valore lineare $o3' = \sqrt[3]{(ab \times de)}$.

I principii geometrici sulla uguaglianza dei prodotti delle corde di un circolo per i loro prolungamenti fino all'incontro della perpendicolare a quello del diametro, dimostrati agli (89, 90) (Fig. 15ª A B C), *si estendono al calcolo misto*; talchè evitando ripetizioni inutili, dai principii stessi dedurremo che: *Dato un punto della superfice di una sfera* cgm *quale centro di radiazione di luce, suono ed altre proprietà di un corpo, rappresentabili graficamente per direzione ed intensità; se nel prolungamento del diametro* 2.R *si determina una lunghezza* l *tale che il prodotto* 2.R l *rappresenti il grado o il limite della proprietà, e per l'estremo della lunghezza* l, *si faccia passare un piano perpendicolare alla direzione del diametro, il piano stesso è all'infinito luogo geometrico limite di tutti i fattori rettilinei dei quali*

ciascuno moltiplicato per la corda della quale è prolungamento, dà il prodotto 2 R l.

Si applicano anche alle operazioni miste i rapporti di quadratura dei segmenti dati dal teorema di Pitagora e derivati, da quello di Tolomeo e da quanto dicemmo sulle serie triangolari, differenziali ed addizionali ai (69, 75) *e simili.*

(Fig. 15ª c) Sia g estremo del diametro della sfera cgm, e pd la traccia di un piano perpendicolare al suo prolungamento. Si traccino per g ed a le zo, rd, ao, ad . . . Se per il principio sopra richiamato abbiamo $gz \times go = gr \times gd = ga \times gp = 2.\text{R}\,l$, ed anche $ad \times an = ao \times as = ap \times ag = l + 2.\text{R} \times l - 2.\text{R}$, per le serie triangolari differenziali ed addizionali avremo $\overline{ad}^2 - \overline{ao}^2 = \overline{gd}^2 - \overline{go}^2 = \overline{dp}^2 - \overline{po}^2$, ed anche $\overline{ad}^2 + \overline{og}^2 = \overline{ao}^2 + \overline{gd}^2 = \overline{gd}^2 + \overline{po}^2 = \overline{go}^2 + \overline{dp}^2$. Se i detti segmenti paragonati per quadratura stanno a rappresentare spazi di tempo, senza duplicare esempi, si vede con facilità quanto, applicati al calcolo misto, possano riuscire utili.

Anche la geometria curvilinea precedentemente trattata trova estesa ed utile applicazione nel calcolo misto.

ES. VI. — Lanciato un piccione viaggiatore P, sollevandosi piega prima a destra della verticale, quindi volge a sinistra descrivendo una curva. Due minuti dopo è lanciato un secondo piccione P' che sollevandosi volge a sinistra della verticale descrivendo una curva. Decorsi minuti 2 $^1/_2$ si vede il piccione P' nella direzione del primo P, e mantenersi con esso in direzione sempre più avvicinarglisi, finchè decorsi altri minuti 2 $^1/_2$ lo raggiunge. Si domanda:

1. Quale curva ha descritto ciascun piccione; 2. Quale dei piccioni ha volato più rapidamente; 3. In quale rapporto sono le distanze percorse da ciascuno.

Si risponde:

1. I due piccioni hanno descritto archi di circonferenze secanti di ugual raggio; 2. I piccioni hanno volato con uguale velocità; 3. Il rapporto tra le distanze da loro percorse è $\frac{5}{7}$.

Infatti (Fig. 45ª) Sia b punto di lanciamento. Nelle circonferenze secanti di ugual raggio $ca = c'a'$, due visuali qualunque bn, bs' dall'estremo b della corda comune ai circoli nei punti d'intersezione, intercettano sulle loro circonferenze archi uguali, ossia arco $a's = ns'$ e $a'sd = ns'd$; ciò non verificasi in altre curve nè in circoli di diverso raggio, e poichè i piccioni sonosi veduti sulla stessa direzione fino all'arrivo, essi hanno percorso archi di circonferenze secanti di ugual raggio.

La durata totale del volo del secondo piccione P' è di minuti 5, e siccome dopo minuti $2\,{}^1/_2 = \frac{5}{2}$ si vide raggiungere la direzione di quello P, ciò accadde quando si trovava nella direzione bn di quello P e nel punto a' esatta metà del proprio percorso $ba'd$.

La durata del volo del primo piccione P è di minuti 7, però i percorsi dei piccioni sono nel rapporto $\frac{5}{7}$.

Gli svolti esempi danno una debole idea della utilità che reca il calcolo cronogoniometrico nella soluzione dei problemi, nonpertanto li riteniamo sufficenti a dimostrare come il metodo da noi suggerito, usa indifferentemente nel calcolo ordinario aritmetico, le quantità eterogenee angoli e tempi senza complicarne la forma. e sfugge tutte le lamentate difficoltà che fino ad oggi si sono incontrate per ridurre l'una all'altra le dette quantità nel calcolo misto.

INDICE

PREFAZIONE . . . . . *Pag.* III

PARTE PRIMA

Cap. I. — *Costruibilità degli angoli con la riga e il compasso* » 1
(7) Unità geometrica degli angoli ed archi . . . » 4
(13) Divisibilità grafica degli angoli . . . . » 6
(16) Degli angoli non costruibili graficamente . . » 9
Cap. II. — *Dei circoli graduati o goniometri* . . . . » 11
(25) Graduazione della circonferenza per archi 3° . » 13
Cap. III. — *Degli elementi triangolari* . . . . . » 15
Cap. IV. — *Proprietà delle perpendicolari ai lati di un triangolo dai suoi vertici* . . . . . » 18
(42) Derivati triangolari . . . . . » 20
(58 al 73) Serie differenziali triangolari . . . » 28
(74 all'83) Serie triangolari addizionali . . . . » 40
(89 al 91) Prodotti tra segmenti riferiti al circolo . » 48
(92) Proprietà della bisettrice nel triangolo . . » 52
(95) Somma degli *n* angoli di una poligonale . . » 55
(97) Elenco dei gruppi determinanti triangolari . . » 57
(103) Formazione delle tavole trigonometriche . . » 62

PARTE SECONDA

Cap. I. — *Radici numeriche di esponente primo* . . . » 65
(114) Gruppi radicali . . . . . » 75
(118) Caratteristica potenziale differenziale e multipla » 81
Cap. II. — (124) *Formazione delle potenze di quantità geometriche* » 85
(125 *bis*) Potenze 2ª di un dato segmento . . . » 90
(126) Potenze di una data area . . . . . » 92
(127) Formazione delle potenze angolari . . . » 93
Cap. III. — *Estrazione grafica delle radici di quantità geometriche* » 94
(130 al 133) Scale radicali . . . . . » id.
(135 *bis*) Radici di esponenti 2ª di quantità geometriche » 99
(136) Determinazione delle radici geometriche di esponente primo . . . . . » id.
(142) Radici ennesime dei valori angolari . . . » 105

Cap. IV. — (144) *Divisione degli angoli per numeri diversi da 2n* Pag. 108
(147) Sulla trisezione dell'angolo . . . . . » 110
(150) Scala trisettrice angolare . . . . . » 112
(152) Calcolo misto applicato alla trisezione . . » 116
(155) Iscrizione dei poligoni regolari di 3^n, e $2^n \times 3^n$ lati » 122
(156) Divisione dell'angolo per un numero primo » 123

PARTE TERZA

(160) **Geometria piana elementare curvilinea** » 128
Cap. I. — (161) *Figure ipocratiche* . . . . . » 129
Cap. II. — (173) *Figure isosceliche* . . . . . » 137
(175) Angoli isoscelici . . . . . » 139
(185) Poligoni isoscelici . . . . . » 144
(192) Quadrilateri ossia triangoli apparenti isoscelici » 149
(209) Triangolo equivalente al circolo . . . . » 158
(210) Poligoni circolari isoscelici . . . . . » 159
(214) Calcolo del rapporto π della circonferenza al diametro . . . . . » 163
(219) Corone circolari isosceliche . . . . . » 166
Cap. III. — (224) *Figure listate* . . . . . » 169
(231) Angoli listati . . . . . » 173
(234) Poligoni radiati . . . . . » 175
(251) Figure spezzate o frammentarie irregolari . » 179
(256) Figure perforate . . . . . » 182
Cap. IV. — (262) *Formazione delle figure piane curvilinee* . » 186
(265) Rettificazione della circonferenza e policentrica » 188
(270) Generazione delle isosceliche semplici . . » 193
(276) Limite di curvatura e figure intrecciate . . » 200
(277) Poligoni caudati . . . . . » 203
Cap. V. — *Figure quadrabili per approssimazione* . . » 209
(284) Parallelo fra il calcolo geometrico ed il numerico » 209
(285) Metodo sommatorio . . . . . » 212
(291) Formazione delle aree del circolo e segmenti circolari . . . . . » 216
(298) Misura dell'area del circolo e di altre coniche . » 222

PARTE QUARTA

Esercitazioni topografiche con la catena agrimensoria e falsa squadra . . . . . » 230
Esercitazione I. — Costruire e misurare gli angoli con la catena agrimensoria . . . . . » 231

Es. II. — Verificare la misura degli angoli di una poligonale *Pag.* 235
Es. III. — Ad una direzione inaccessibile tracciare parallele, abbassare perpendicolari o allineamenti che formino con la direzione angoli voluti, ecc. Ripetere la stessa operazione se la direzione è inaccessibile e invisibile . » 237
Es. IV. — Determinare i punti notevoli di un triangolo in parte o in tutto inaccessibile. . . . . » 240
Es. V. — Misurare la distanza di punti inaccessibili . . . » 242
Es. VI. — Determinare l'estremo della corda bisettrice al vertice in un triangolo in parte o in tutto inaccessibile » 246
Es. VII. — Misurare i lati di un triangolo mediante l'estremo della corda bisettrice al vertice. . . . . » 249
Es. VIII. — Misura dei triangoli inaccessibili con metodi diversi » 251
Es. IX. — Costruire un triangolo dato un lato e due elementi triangolari ovvero dati i tre lati . . . . . » 255
Es. X. — Misure di poligoni inaccessibili con metodi vari . » 258
Es. XI. — Misurare terreni di contorno curvilineo o mistilineo » 262

ARITMETRO » 264

Graduazione dell' Aritmètro . . . . . » 265
Uso dell'Aritmètro . . . . . » 267

I. CENNO SULLA CRONOGONIOMETRIA . . » 271

II. Graduazione del Goniocronometro . . . . . » 273
Disposizione del Cronogoniometro . . . . . » 274
Tavole decimali cronogoniometriche . . . . . » 276
Calcolo misto numerico . . . . . » 278
III. Grafica cronogoniometrica ed applicazioni . . . . » 282
Indice . . . . . » 291
Errata-Corrige . . . . . » 294

Pag	Linea	ERRATA	CORRIGE
22	30	ang. $eft = ahp = C_e$	ang. $eft = ehp = C_e$
24	26	nell'acutangolo ab	nell'acutangolo ahb
25	8	Le parallele xh, he	Le parallele xb, he
25	29	ad ab, ge	ad ab, $g'e$
26	1	ottusangolo fhb	ottusangolo fhe
26	26	$\frac{ap \times pb}{pq}$	*soppressa*
27	5	$\frac{br + vh}{2} \times \frac{bv + vh}{ro}$	$\frac{br + rh}{2} \times \frac{br + rh}{ro}$
27	20	bn	bm
28	3	triang. ptl	triang. $p'tl$
29	3	lati ca, eb	lati ca, cb
29	17	$= \overline{ac}^2 - \overline{cb}^2$	$= \overline{ac}^2 - \overline{cb}^2$
31	12	$= \overline{60}^2$	$= \overline{bo}^2$
31	14	$= ap\sqrt{\overline{ac}^2 - \overline{cb}^2}$	$ap = \sqrt{\overline{ac}^2 - \overline{cb}^2}$
33	23	vertice comune v	vertice comune c
33	31	centro comune e	contro comune c
36	14	i triangoli deb, adb	i triangoli acb, adb
47	24	$= \overline{br}^2 + \overline{rs}^2$	$= \overline{br'}^2 + \overline{r'a}^2$
52	2	$= 2.a'o'p'$	$= 2.a'p'$
52	14	le perpendicolari $m'a''$, $e''p'''$	le perpendicolari $m'a''$, $e''p''$
57	8	. . . **determinanti rettangolari**	. . . **determinanti triangolari**
78	5	42,00005	32,00005
86	27	$h'2 = ho$	$h'2 = h'o$
87	4	$oc1,012,o23$	$oc1,o12,o23$
96	24	la perpendicolare che . . .	la perpendicolare 43, n e col raggio on l'arco . . .
100	21	ad incontrare in 1.	ad incontrare in 4.
107	13	(153)	(143)
111	1	l'arco acb	l'arco $ac'b$
111	11	dell'arco acb	dell'arco $ac'b$
111	22	come ar	come ar'
122	20	arco az	arco rz
124	16	angolo bcg'	angolo dcg'
124	18	ang. ack	ang. $\frac{ack}{13}$
125	1	ang. cgd'	ang. dcg'
130	3	lunola $aicb$	lunola $ai'g$
130	17	diametro ab	diametro ad
131	17	$:: \overline{ab}^2 : \overline{lu}^2 :$	$:: \overline{ab}^2 : \overline{lm}^2$
133	23	parallela ab, cm	parallela ab', $c''m$
133	24	triangolo $anb = acb$	triangolo anb, $ac'b$
133	25	triang. $bmd = bcd$	triang. $bmd = bc''d$
134	2	$azdh$ che . . .	$bzdh$ che . . .
135	11	$bkdh = 2$	$bzdh = 2$
1 6	4	$\overline{o'q'}^2) - (\overline{ac}^2$	$\overline{o'q'}^2) = (\overline{ac}^2$
139	9	(Fig. 52ª)	(Fig. 46ª)
147	28	isosceliche amb, fme	isosceliche amb, $fm'e$
147	30	, $omzo'z'm$	, $omzo'z'm'$
198	30	prodotti	semiprodotti
198	31	prodotti	semiprodotti
214	2	*ascritte*	*ascisse*

Pag.	Linea	ERRATA	CORRIGE
217	30	*parallela* f f'	*parallela* f f''
217	32	*zaff'n*	*raff''n*
218	3	l'arco *rnf'*	l'arco *rnf''*
218	4	parallela *e''f''*	parallela *e''f'*
218	7	parallela *me'x*	parallela *mhx*
218	11	l'arco *rnf'*	l'arco *rnf''*
278	7	$a \lessgtr 360^o$	$a < 360^o$

PREFAZIONE.

Pag.	Linea	ERRATA	CORRIGE
IV	6	del quinto....	del decimoquinto
VI	27	stile assai dimeno	stile assai dimesso

Fig. 1ª

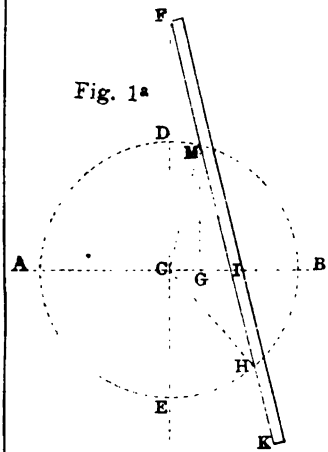


Fig. 2ª

Fig. 2ªA

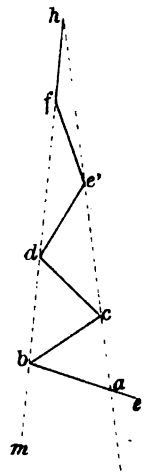


Fig. 2ªB

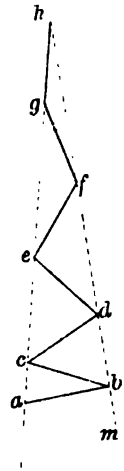


Fig. 3ª A

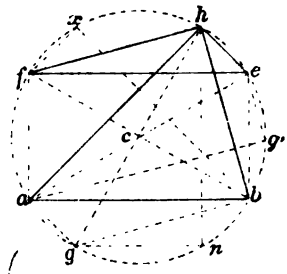


Fig. 3ª

Fig. 3ªB

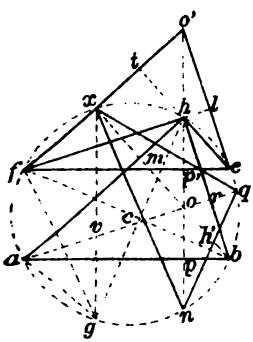


Fig. 3ªC

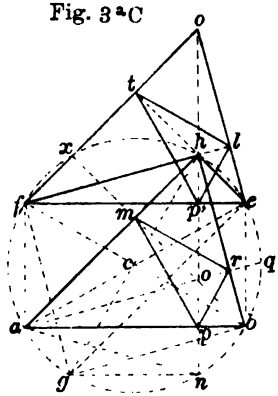


Fig. 3ªD

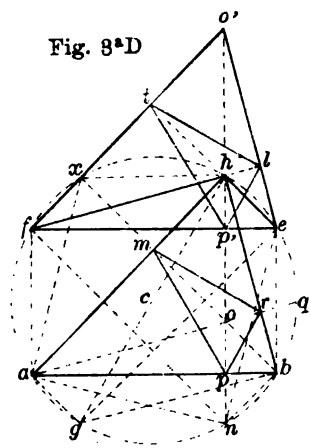


Fig. 4ª

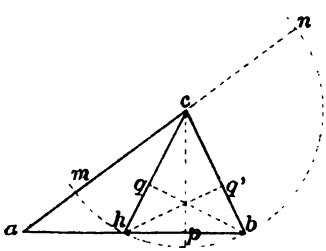


Fig. 5ª

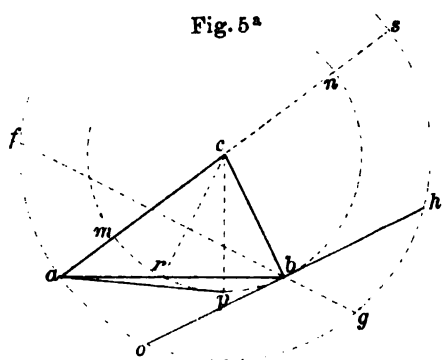


Fig. 6ª

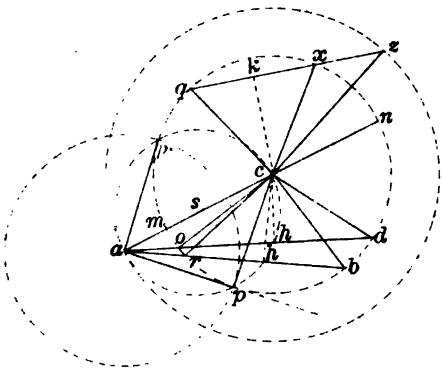


Fig. 7ª

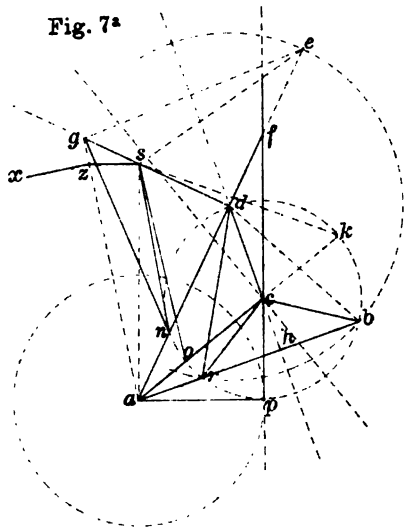


Fig. 8ª

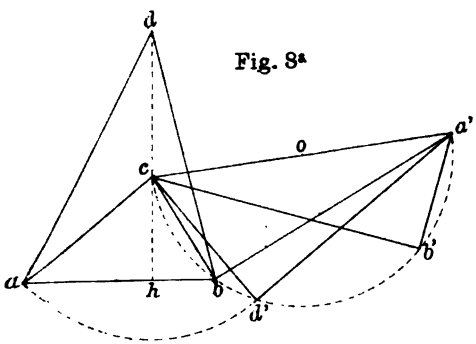


Fig. 9ª

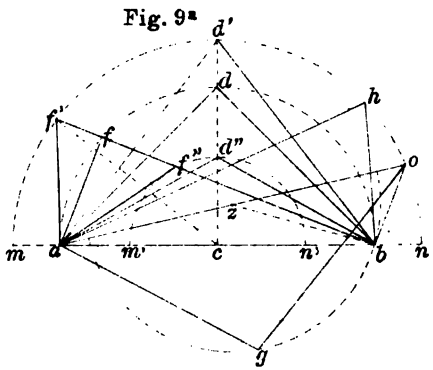


Fig. 10ª

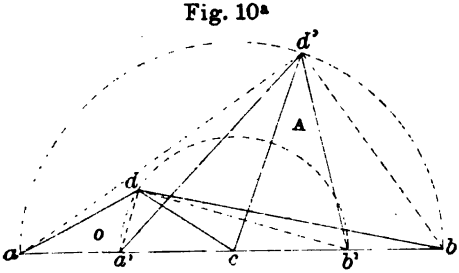


Fig. 11ª

Fig. 11ªA

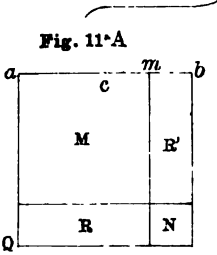


Fig. 11ªB

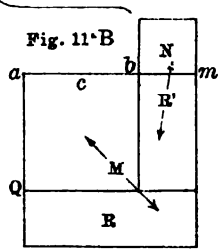


Fig. 12ª

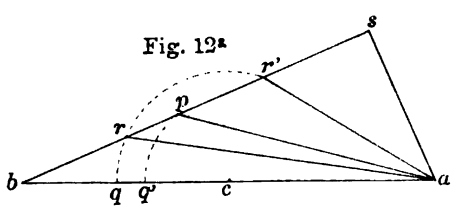


Fig. 13ª

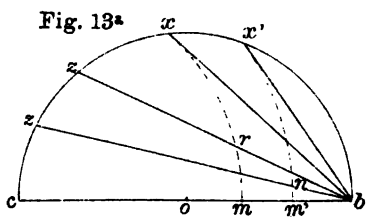


Fig. 14ª

Fig. 14ª A

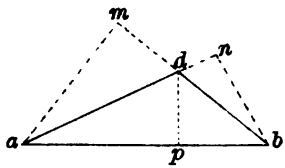


Fig. 14ª B

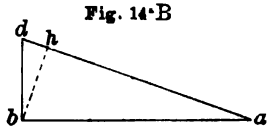


Fig. 14ª C

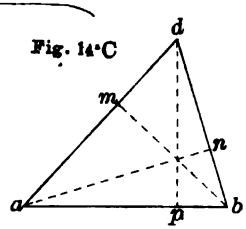


Fig. 15ª

Fig. 15ª A

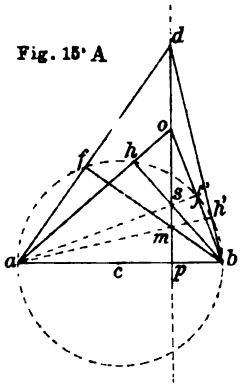


Fig. 15ª B

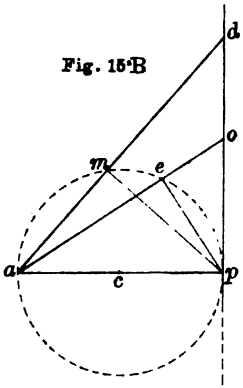


Fig. 15ª C

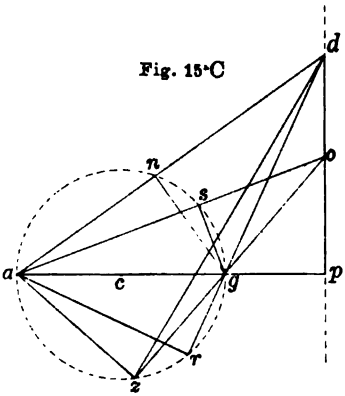


Fig. 16ª

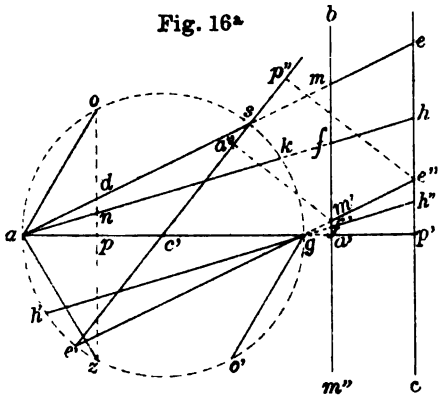


Fig. 17ª

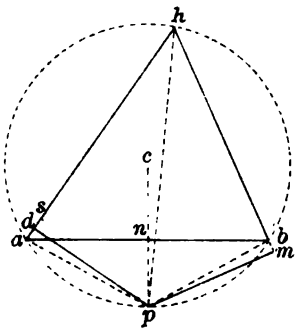


Fig. 18ª

Fig. 18ª A

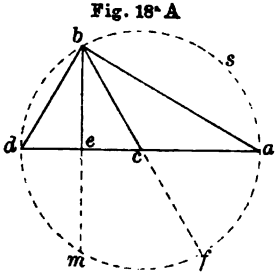


Fig. 18ª B

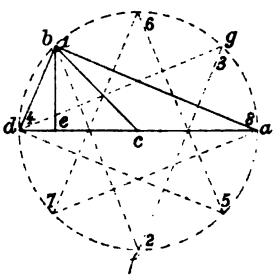


Fig. 19ª

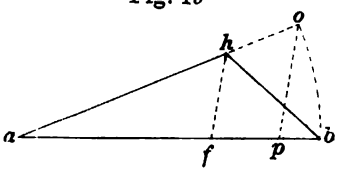


Fig. 20ª

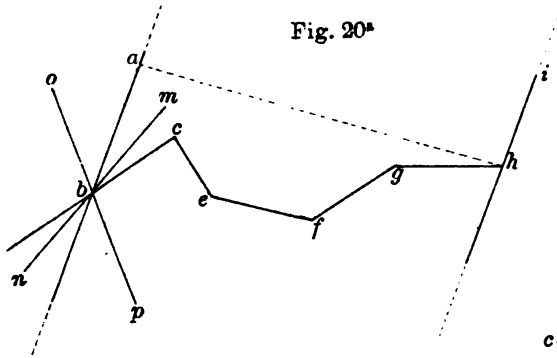


Fig. 21ª

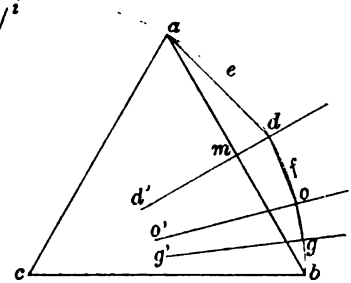


Fig. 22ª

Fig. 22ª A

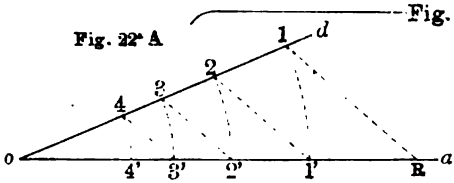


Fig. 22ª B

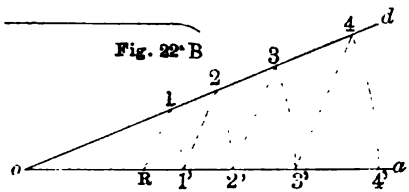


Fig. 23ª

Fig. 23ª A

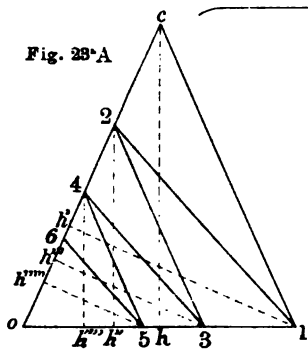


Fig. 23ª B

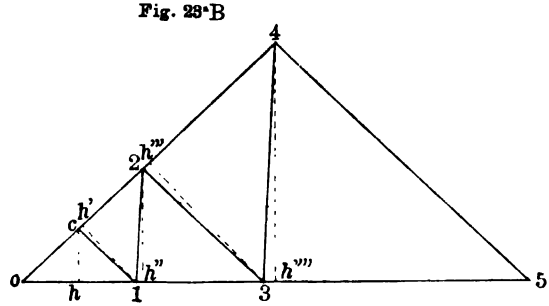


Fig. 23ª C

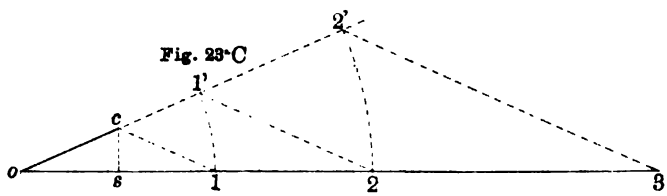


Fig. 24ª

Fig. 24ª A

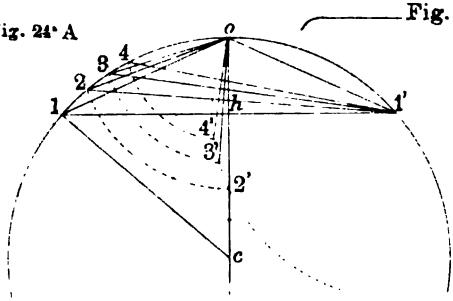


Fig. 24ª B

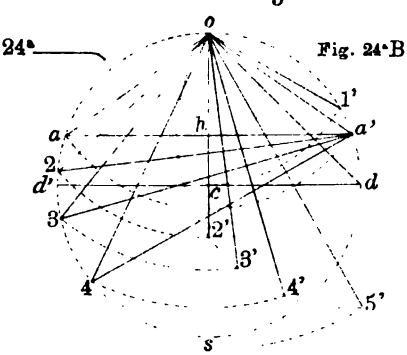


Fig. 25ª

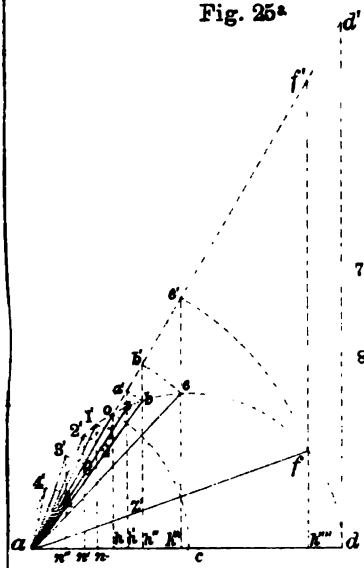


Fig. 27ª

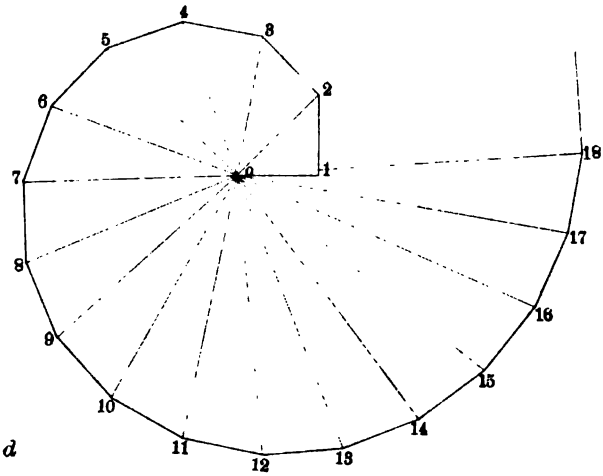


Fig. 26ª

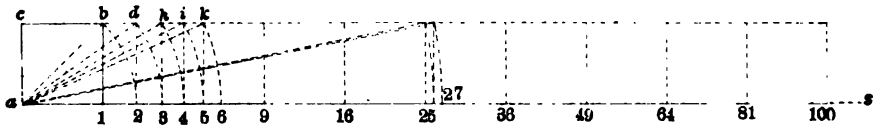


Fig. 28ª

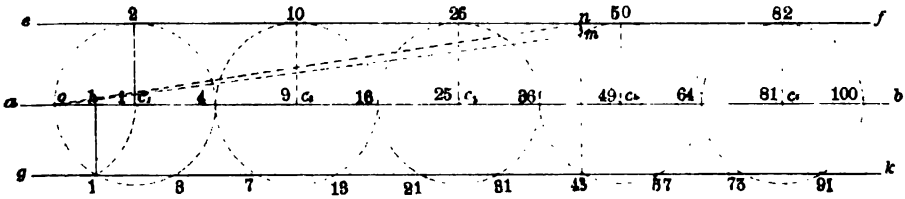


Fig. 29ª

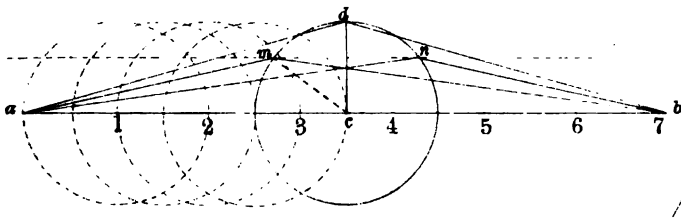


Fig. 31ª

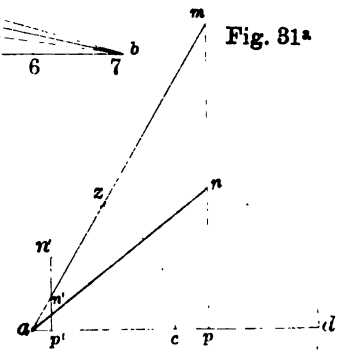


Fig. 30ª

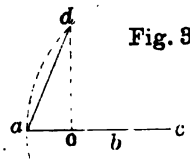


Fig. 34ª

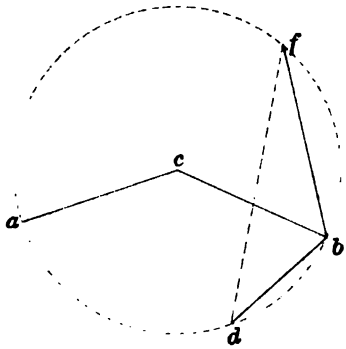


Fig. 35ª

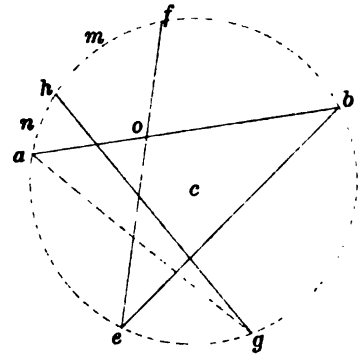


Fig. 32ª

Fig. 33ª vedi Tav. VII

Fig. 36ª

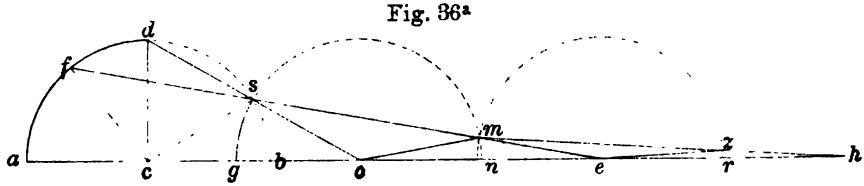


Fig. 38ª

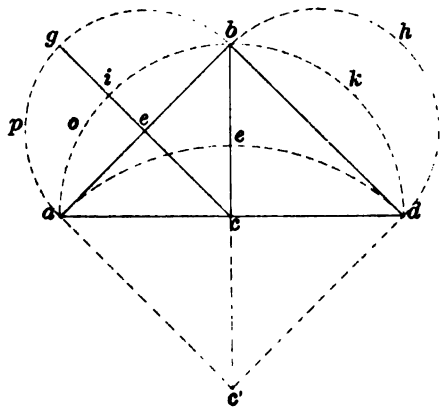


Fig. 33ª

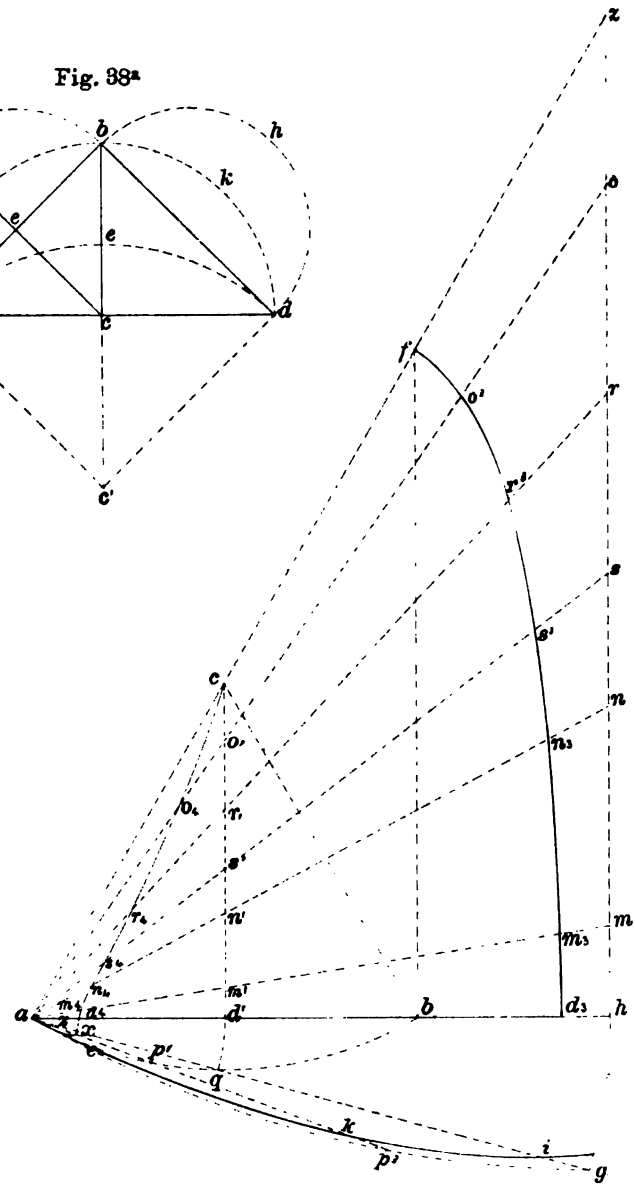


Fig. 37ª

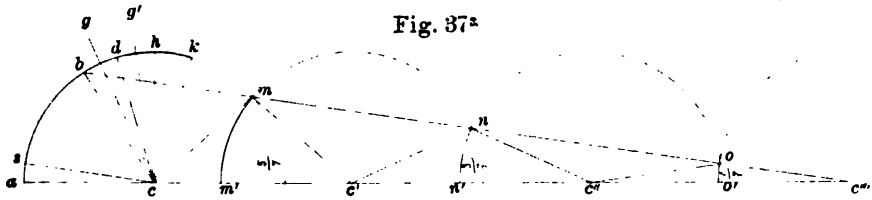


Fig. 39ª

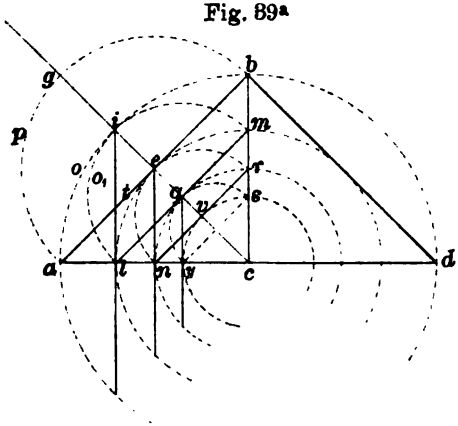


Fig. 40ª

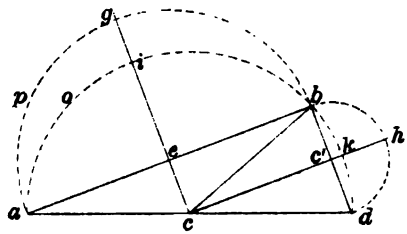


Fig. 41ª

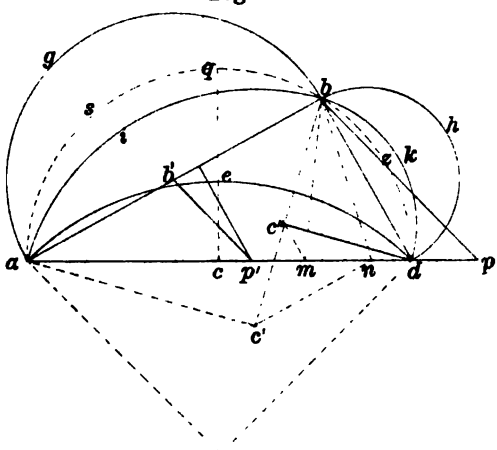


Fig. 42ª

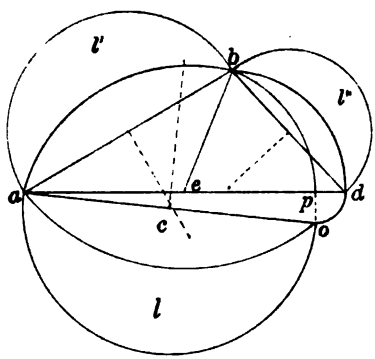


Fig. 43ª

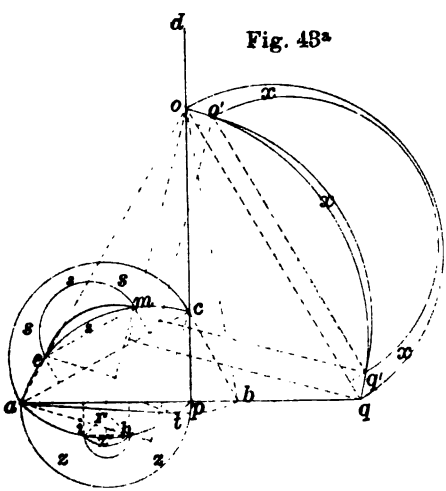


Fig. 44ª

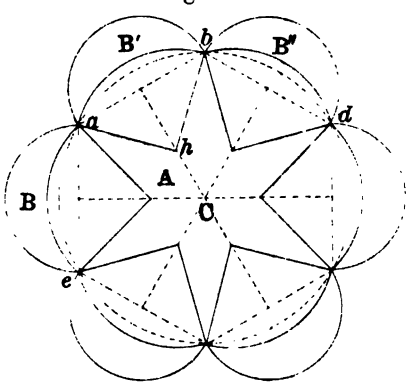


Fig. 45ª

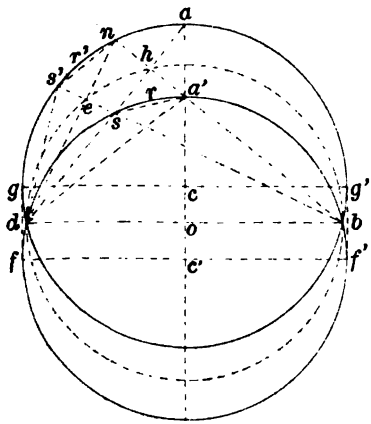


Fig. 46ª A

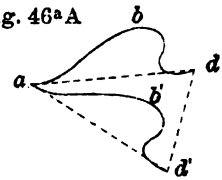


Fig. 46ª B

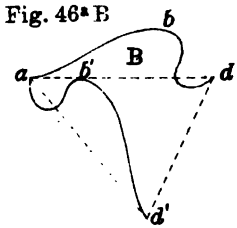


Fig. 46ª C

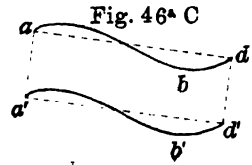


Fig. 46ª D

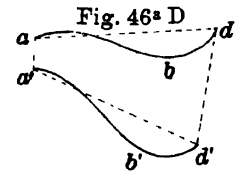


Fig. 46ª E

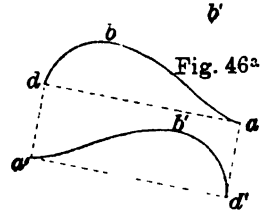


Fig. 46ª F

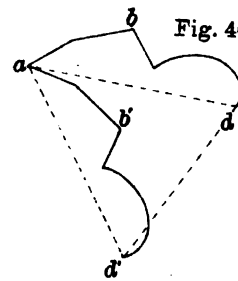


Fig. 46ª G

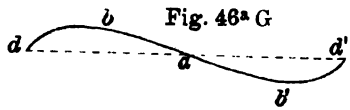


Fig. 47ª A

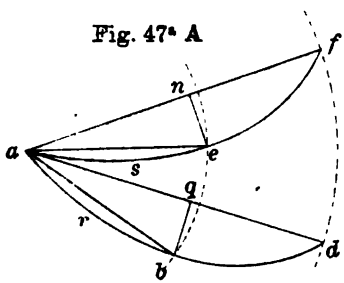


Fig. 47ª B

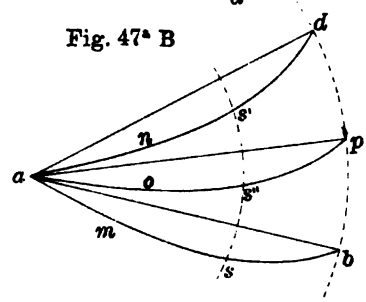


Fig. 48ª

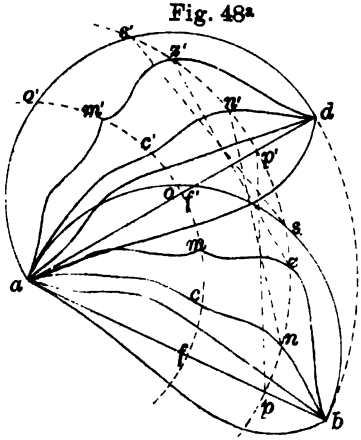


Fig. 49ª

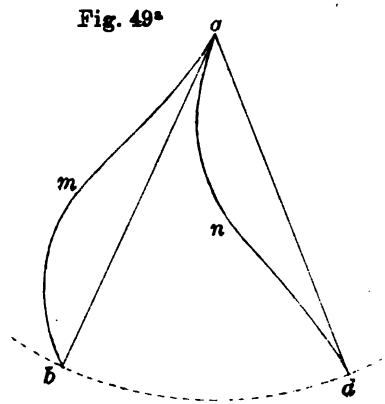


Fig. 50ª M

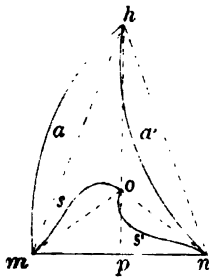


Fig. 50ª N

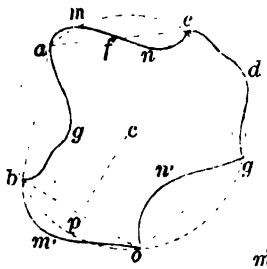


Fig. 50ª O

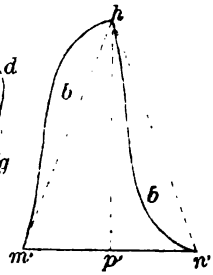


Fig. 50ª P

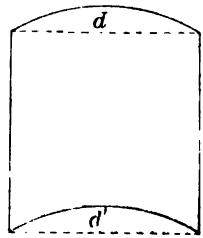


Fig. 50ª Q

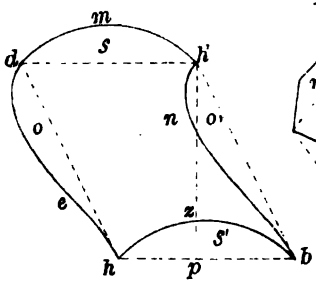


Fig. 50ª R

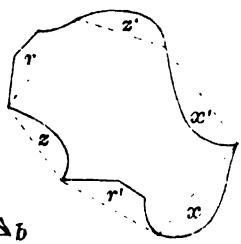


Fig. 50ª S

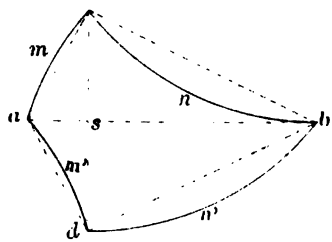


Fig. 51ª

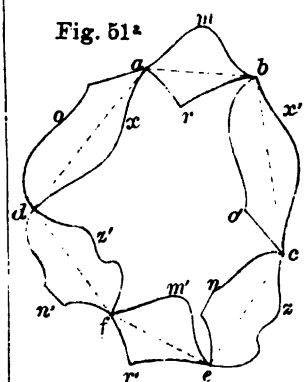


Fig. 52ª A

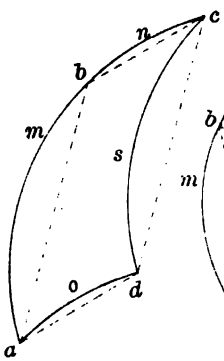


Fig. 52ª B

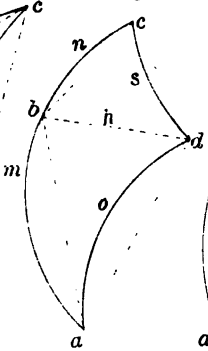


Fig. 52ª D

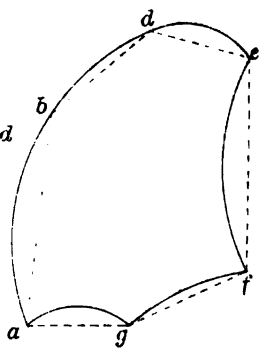


Fig. 53ª

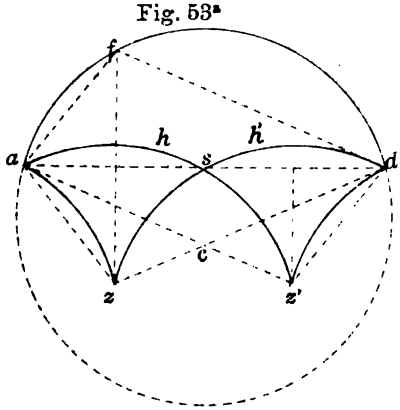


Fig. 54ª

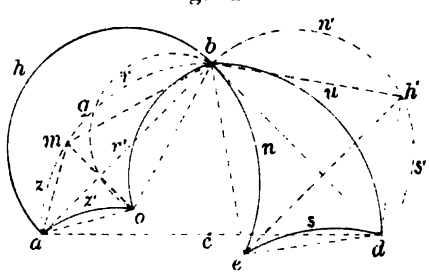


Fig. 55ª

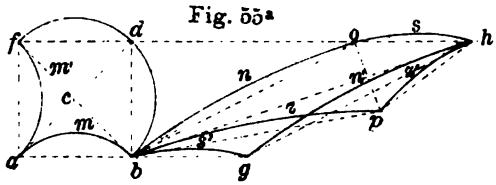


Fig. 56ª

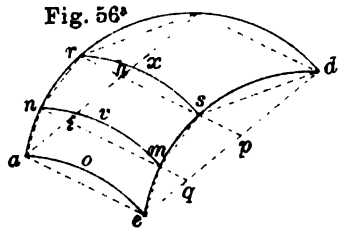


Fig. 57ª A

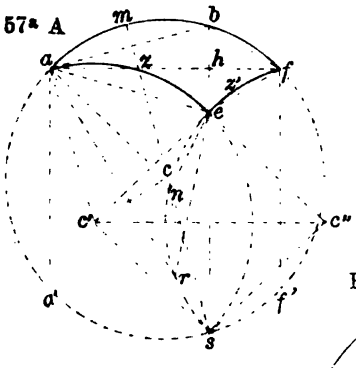


Fig. 60ª A

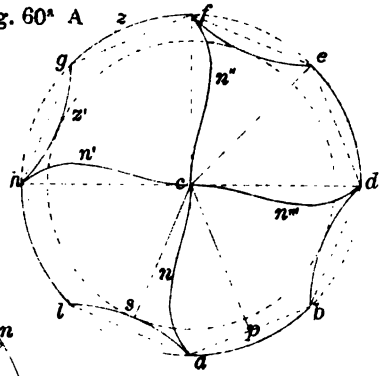


Fig. 58ª

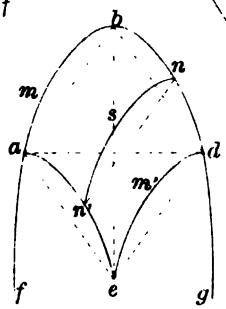


Fig. 57ª B

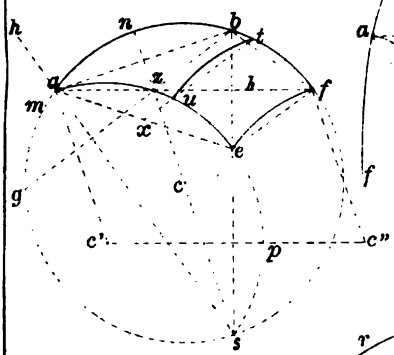


Fig. 60 B

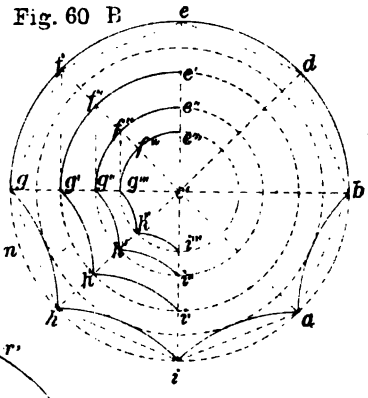


Fig. 59ª

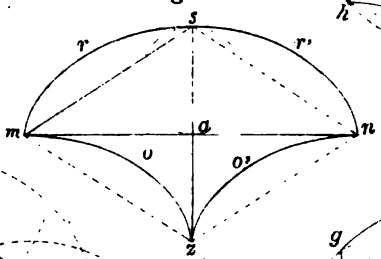


Fig. 57ª C

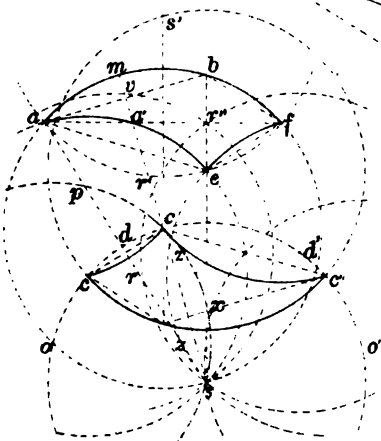


Fig. 60ª C

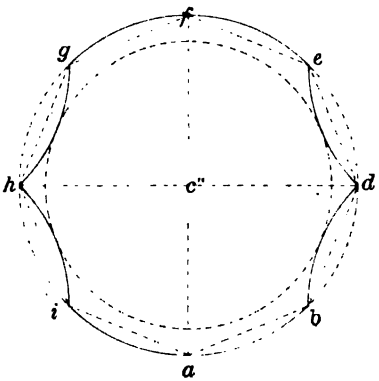


Fig. 61ª

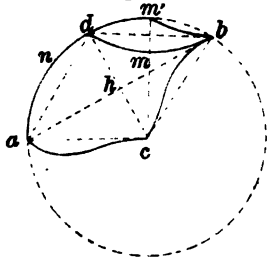


Fig. 62ª

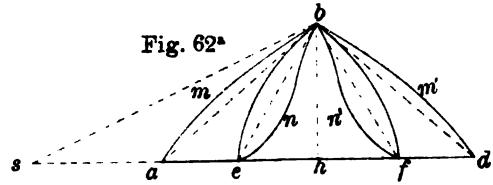


Fig. 63ª A

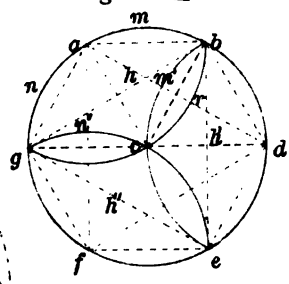


Fig. 63ª B

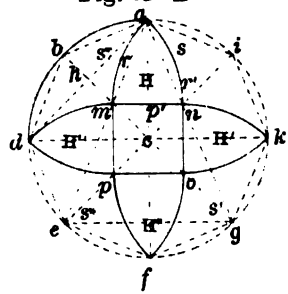


Fig. 63ª C

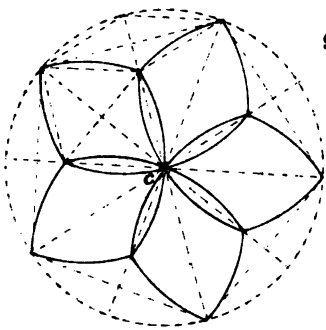


Fig. 64ª A

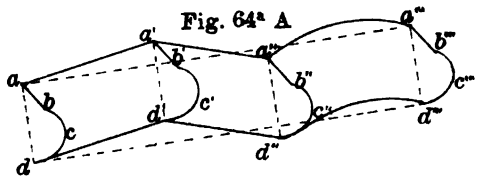


Fig. 63ª D

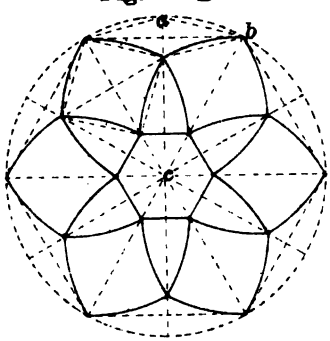


Fig. 64ª B

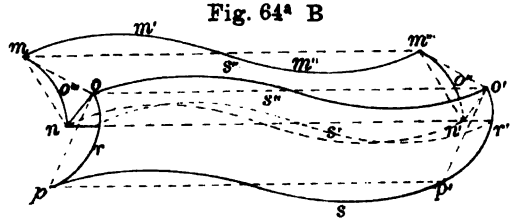


Fig. 66ª A

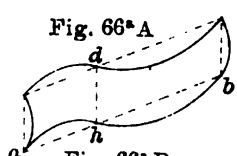


Fig. 63ª E

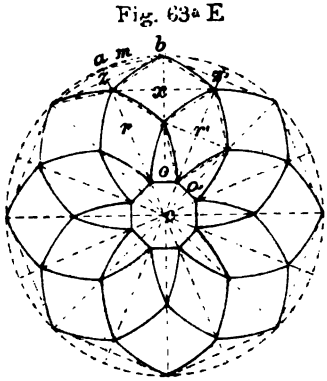


Fig. 65ª

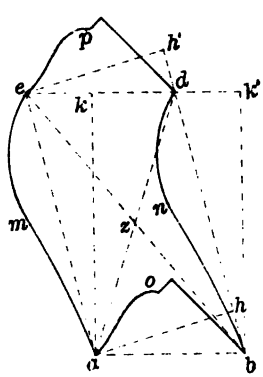


Fig. 66ª B

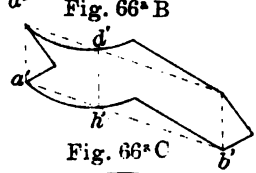


Fig. 66ª C

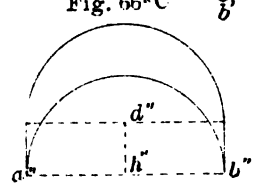


Fig. 67ª

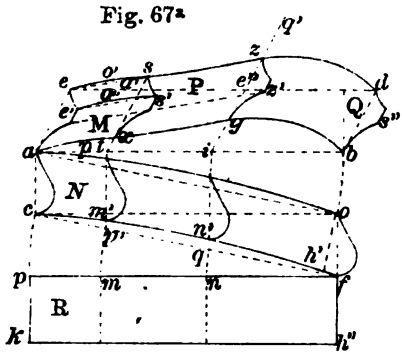


Fig. 68ªA

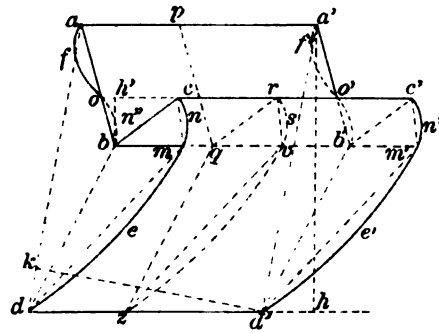


Fig. 69ªA

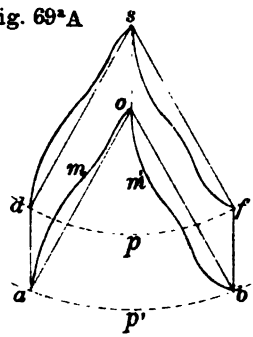


Fig. 68ªB

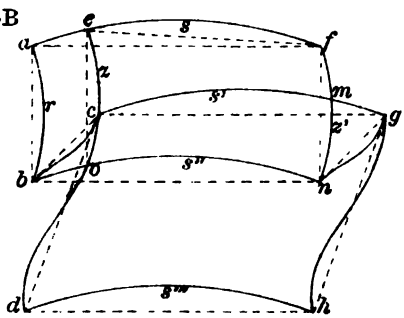


Fig. 69ªB

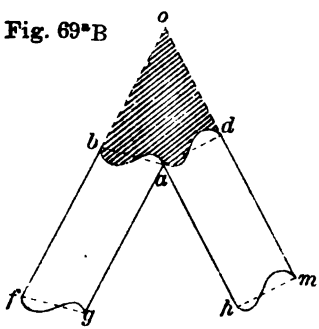


Fig. 69ªC

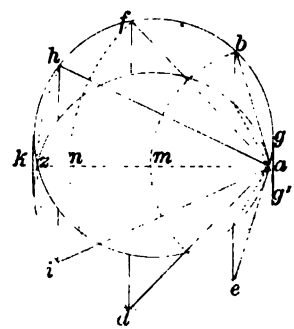


Fig. 69ªF

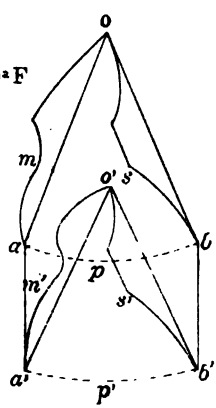


Fig. 69ªD

Fig. 69ªE

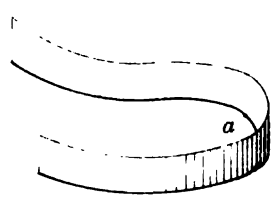


Fig. 70ª A

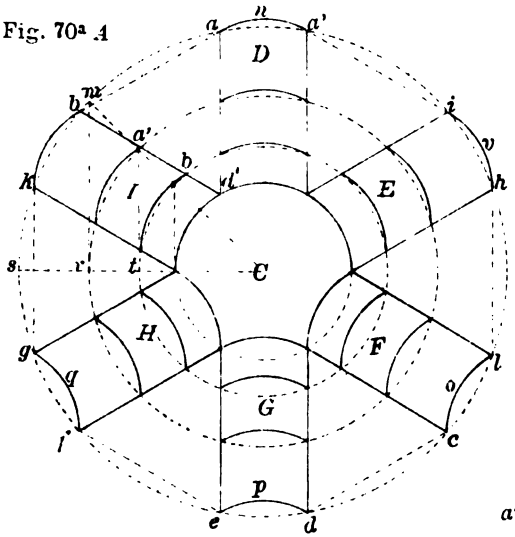


Fig 71ª A

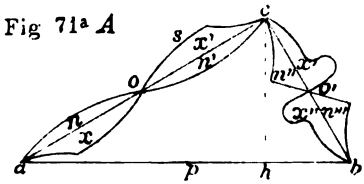


Fig. 71ª B

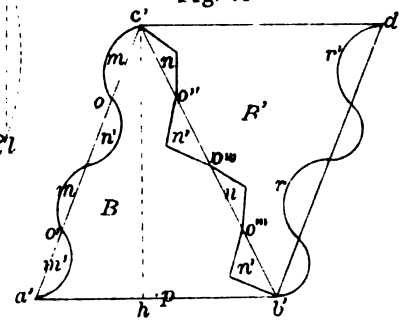


Fig. 70ª B

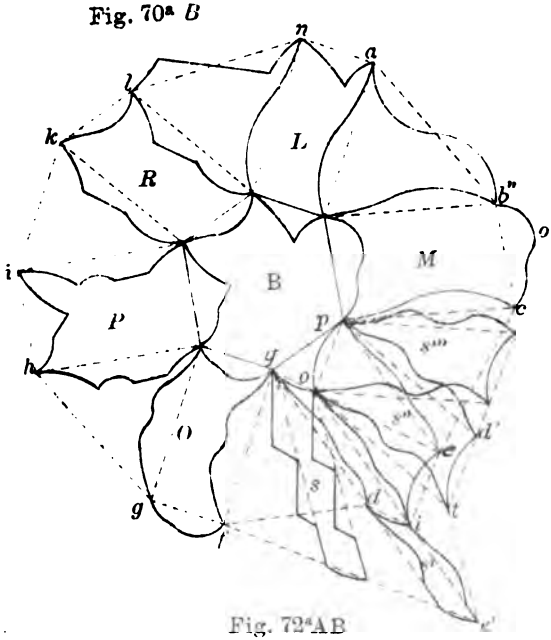


Fig. 71ª C

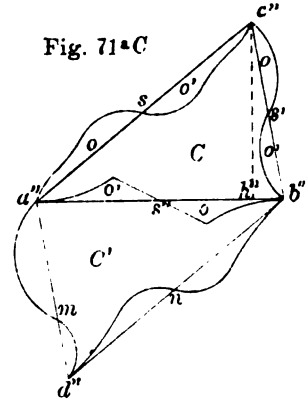
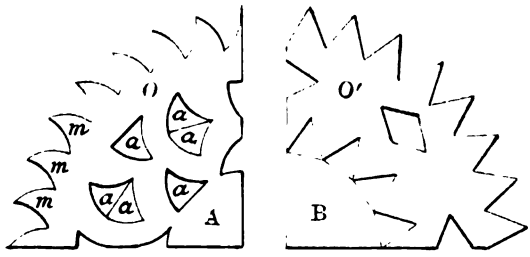


Fig. 72ª AB



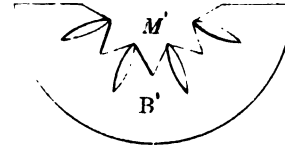


Fig. 72ª C

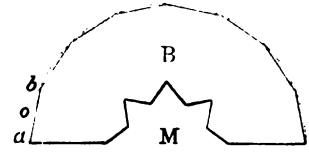


Fig. 73ª A

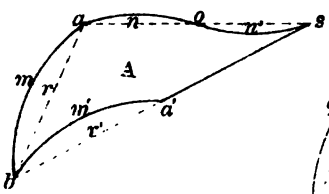


Fig. 73ª B

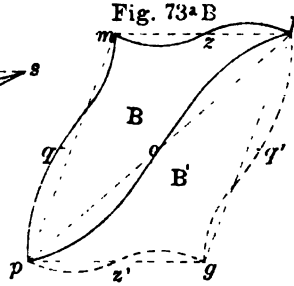


Fig 73ª C

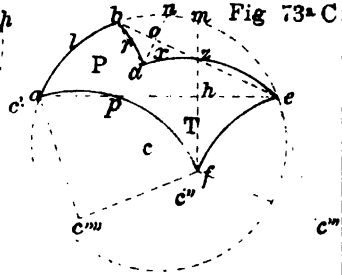


Fig. 74ª A

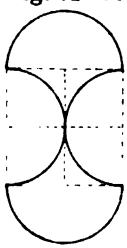


Fig. 74ª B

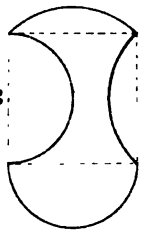


Fig. 74ª C

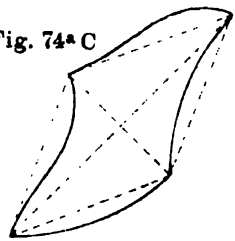


Fig. 75ª

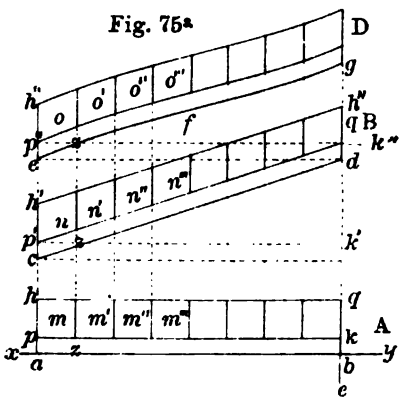


Fig. 76ª

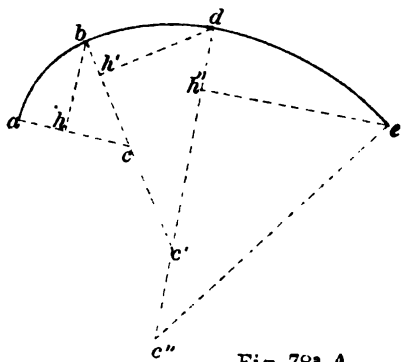


Fig. 77ª

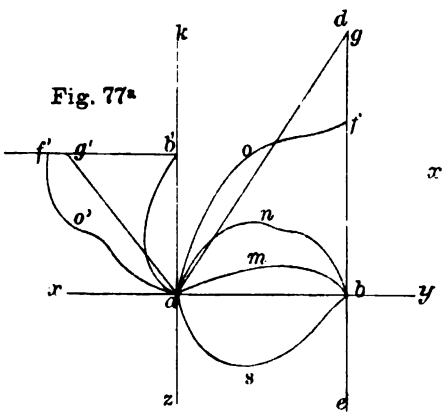


Fig. 78ª A

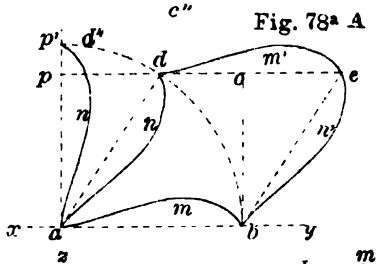


Fig. 78ª B

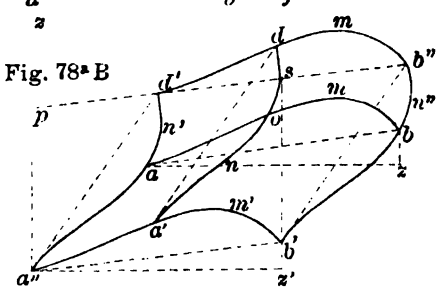


Fig. 79ª

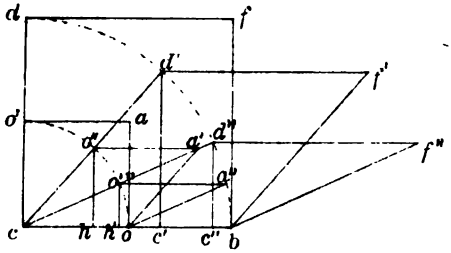


Fig. 80ª

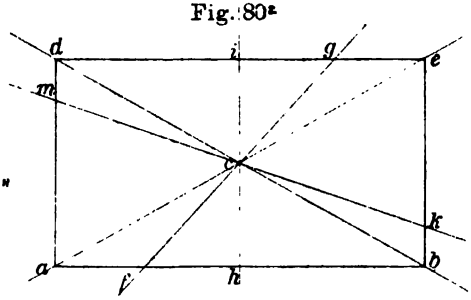


Fig. 81ª

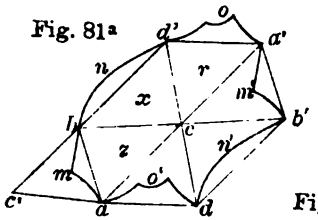


Fig. 82ª

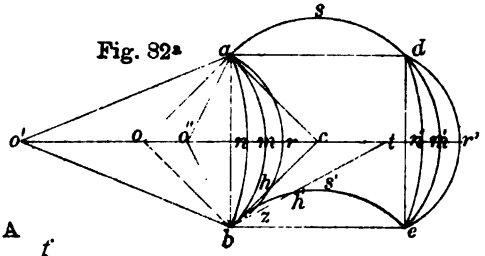


Fig. 83ª A

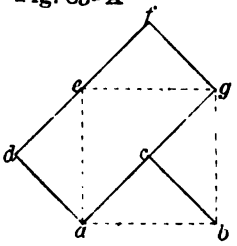


Fig. 83ª B

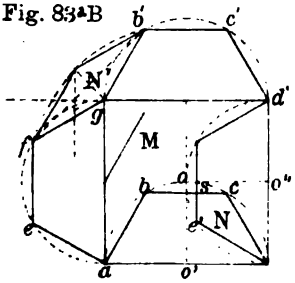


Fig. 83ª C

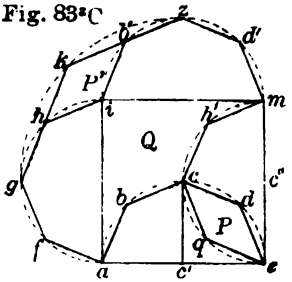


Fig. 84ª

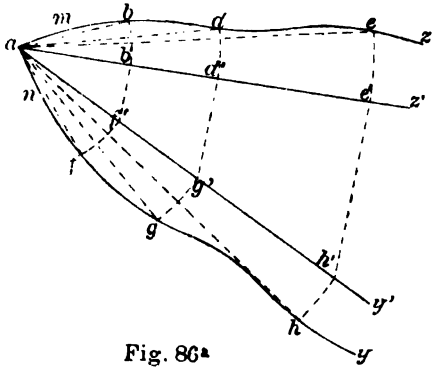


Fig. 83ª D

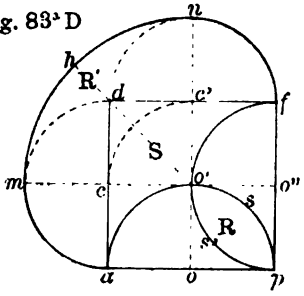


Fig. 85ª

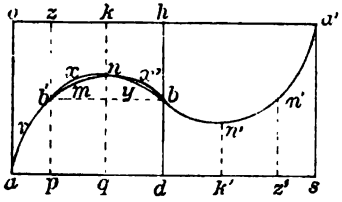


Fig. 86ª

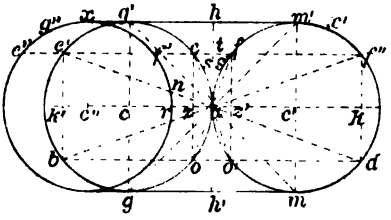


Fig. 87ª A

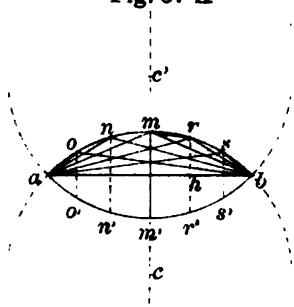


Fig. 87ª B

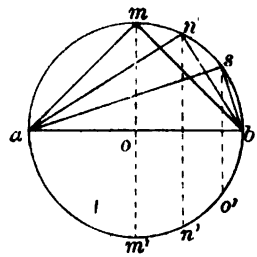


Fig. 88ª

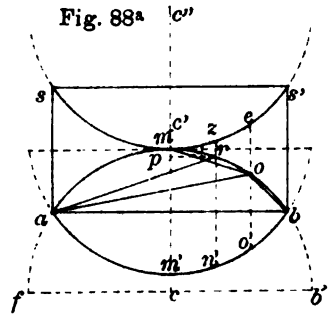


Fig. 89ª

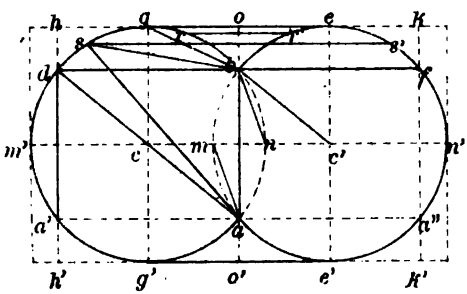


Fig. 90ª

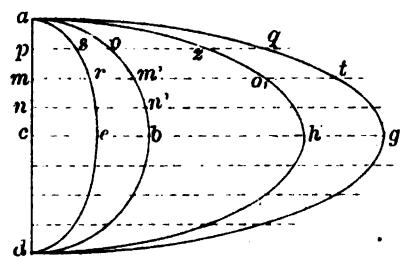


Fig. 91ª

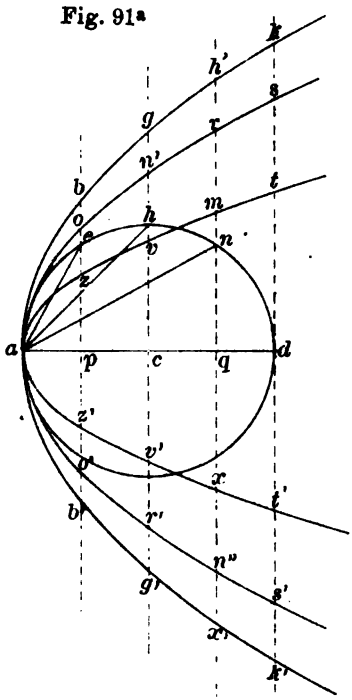


Fig. 92ª

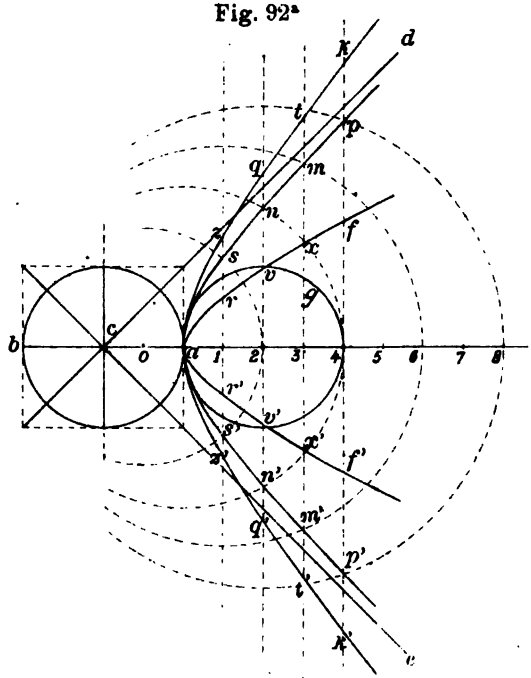


Fig. 94ª

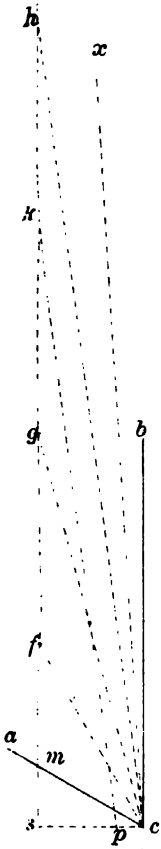


Fig. 93ª

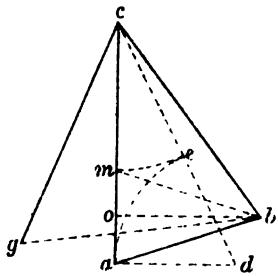


Fig. 95ª

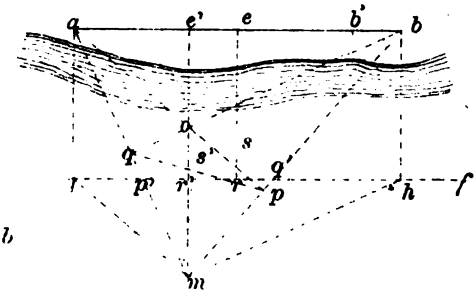


Fig. 96ª

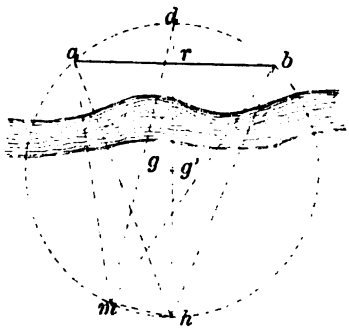


Fig. 97ª

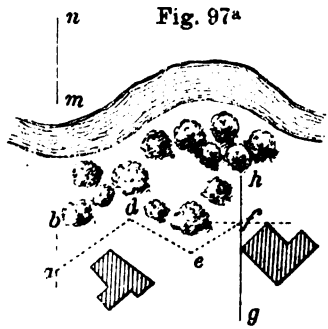


Fig. 98ª A

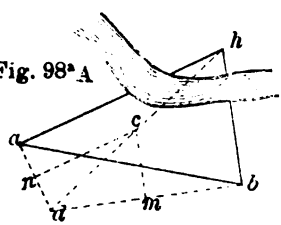


Fig. 98ª B

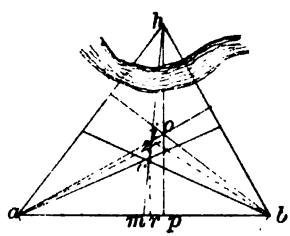


Fig. 98ª C

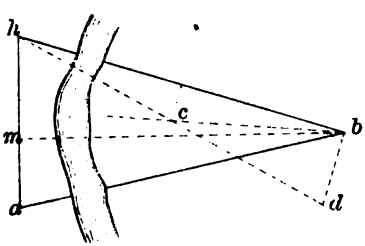


Fig. 98ª D

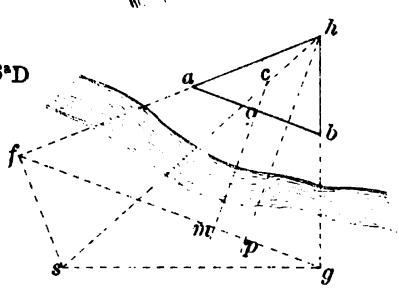


Fig. 99ª

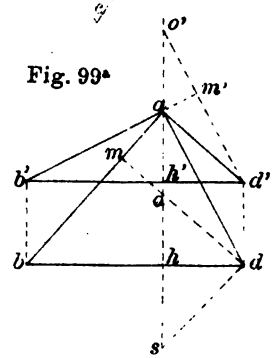


Fig. 100a

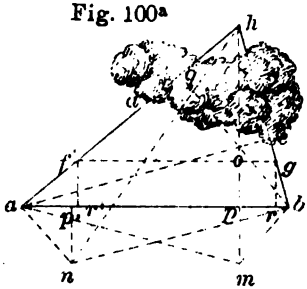


Fig. 101a

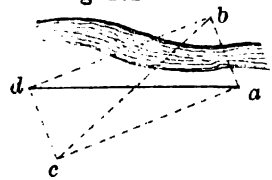


Fig. 102a

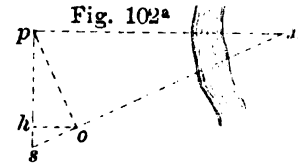


Fig. 103a

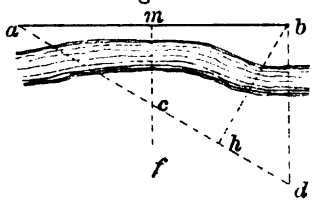


Fig. 104a

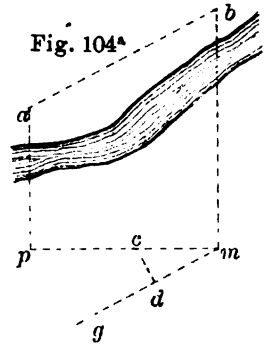


Fig. 105a

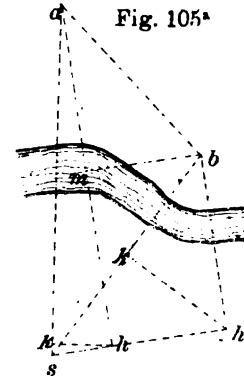


Fig. 106a

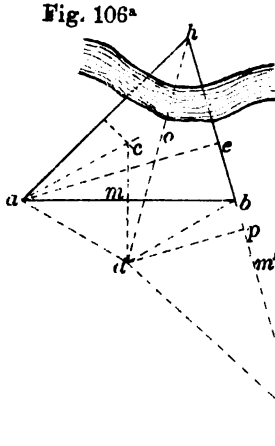


Fig. 107a

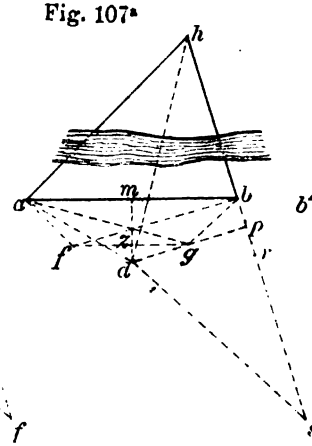


Fig. 108a

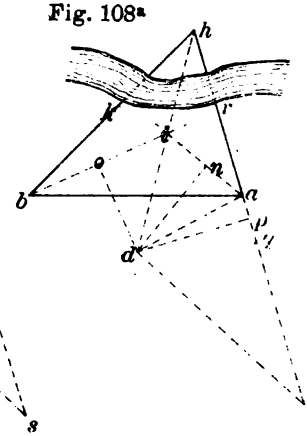


Fig. 109a

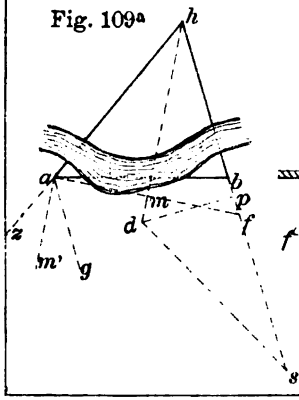


Fig. 110a

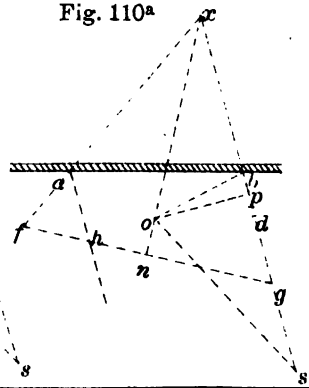


Fig. 111a

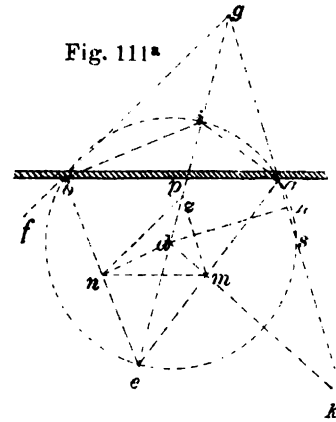


Fig. 112ª

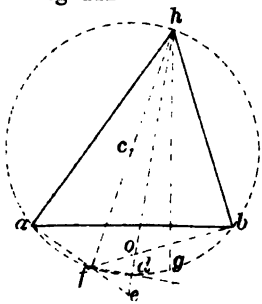


Fig. 113ª

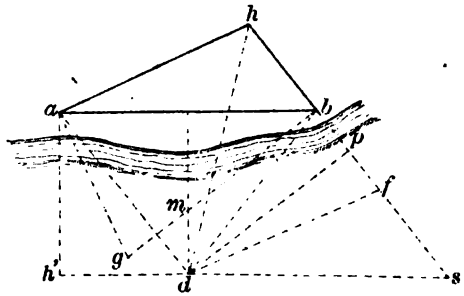


Fig. 114ª

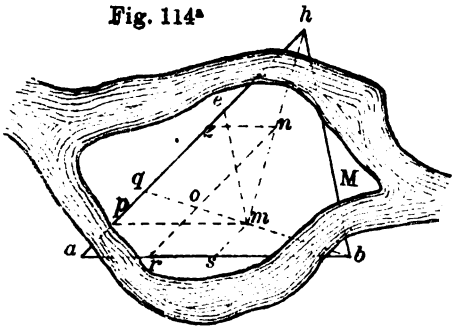


Fig. 115ª

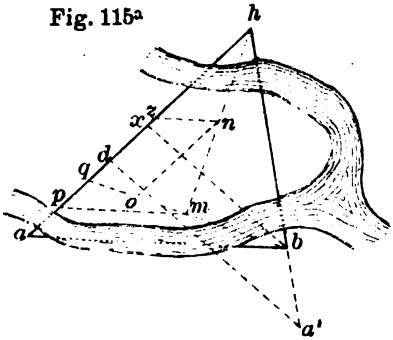


Fig. 116ª

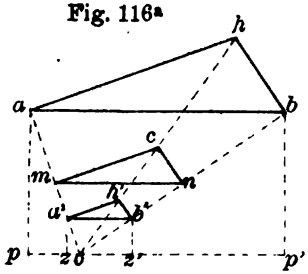


Fig. 117ª

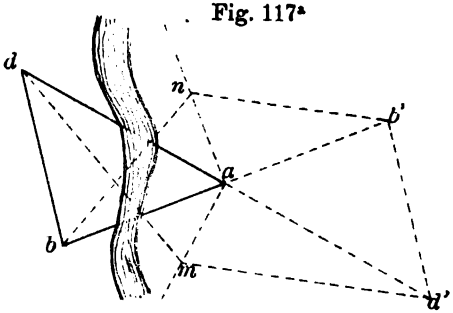


Fig. 118ª

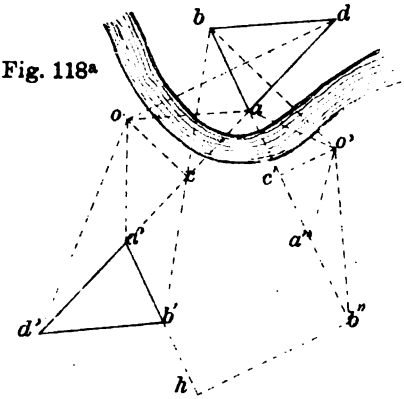


Fig. 119ª

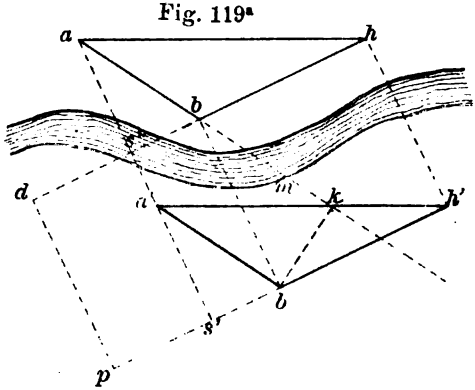


Fig. 120ª

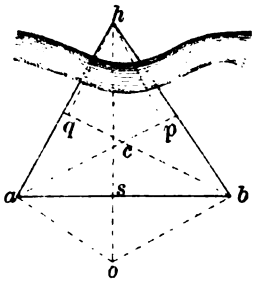


Fig. 121ª

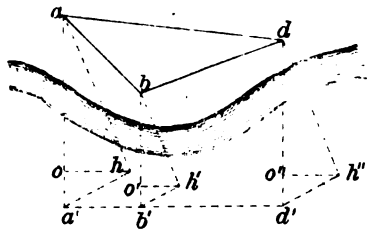


Fig. 122ª

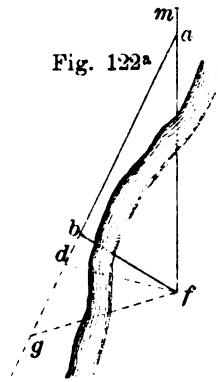


Fig. 123ª

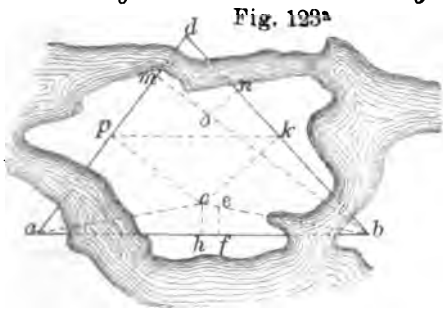


Fig. 124ª

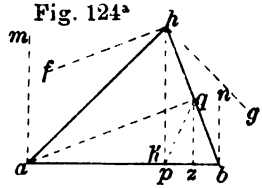


Fig. 125ª

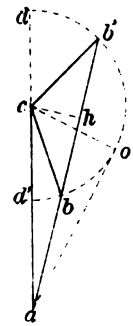


Fig. 126ª

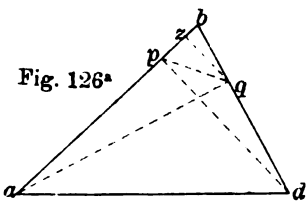


Fig. 127ª

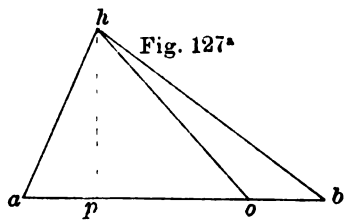


Fig. 128ª

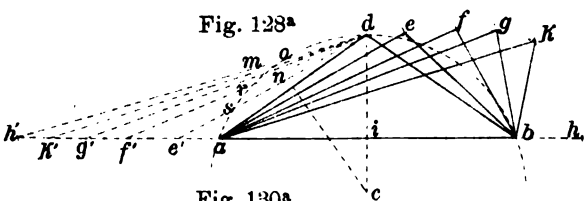


Fig. 129ª

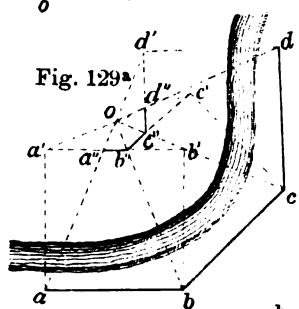


Fig. 130ª

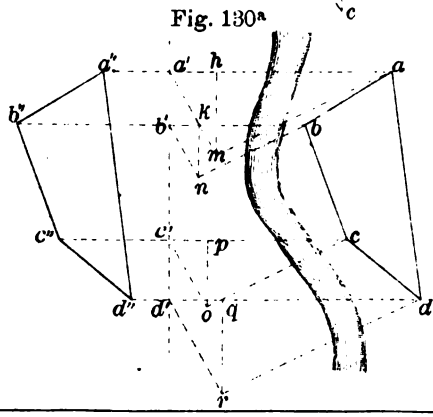


Fig. 131ª

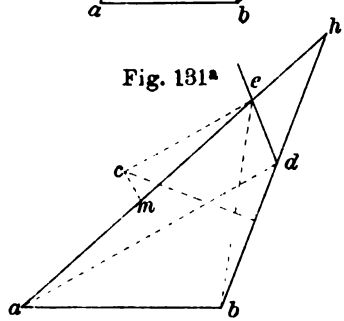


Fig. 132ª

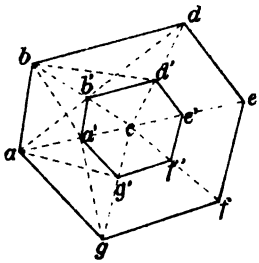


Fig. 133ª

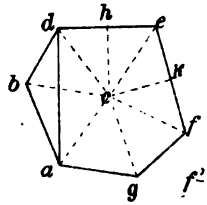


Fig. 134ª

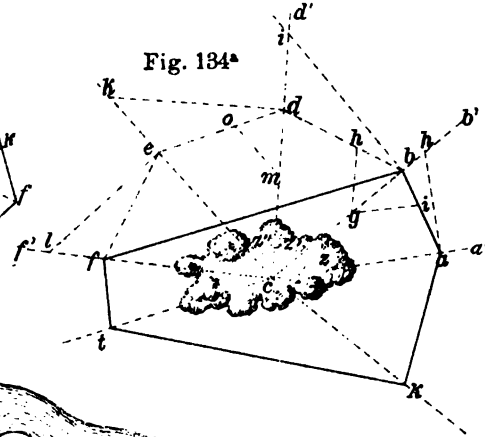


Fig. 136ª

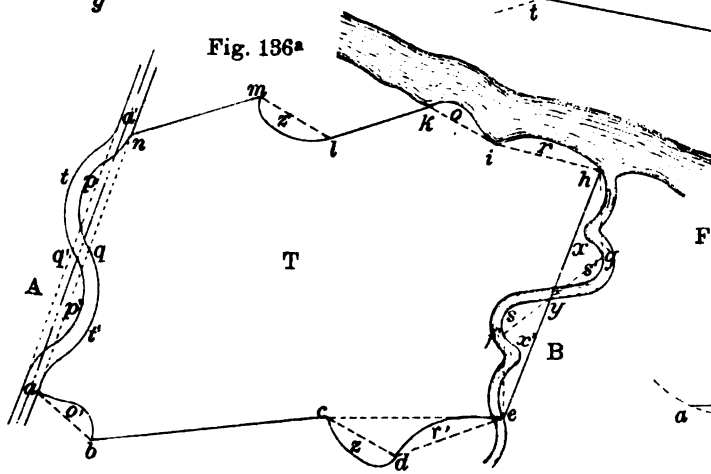


Fig. 135ª

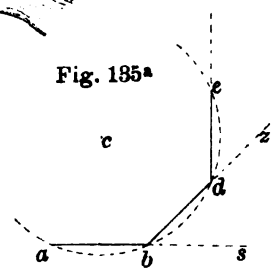


Fig. 137ª B

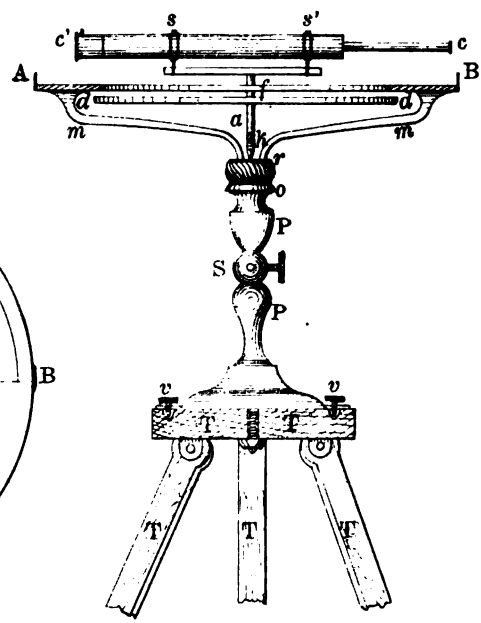
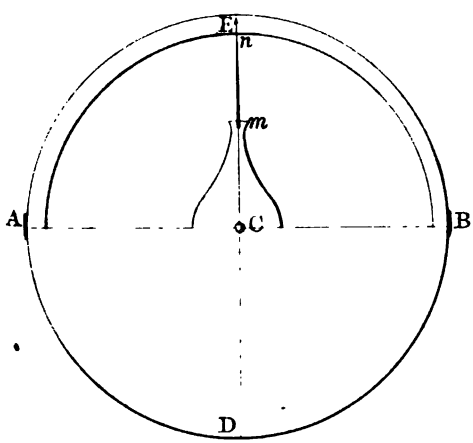


Fig. 137ª A



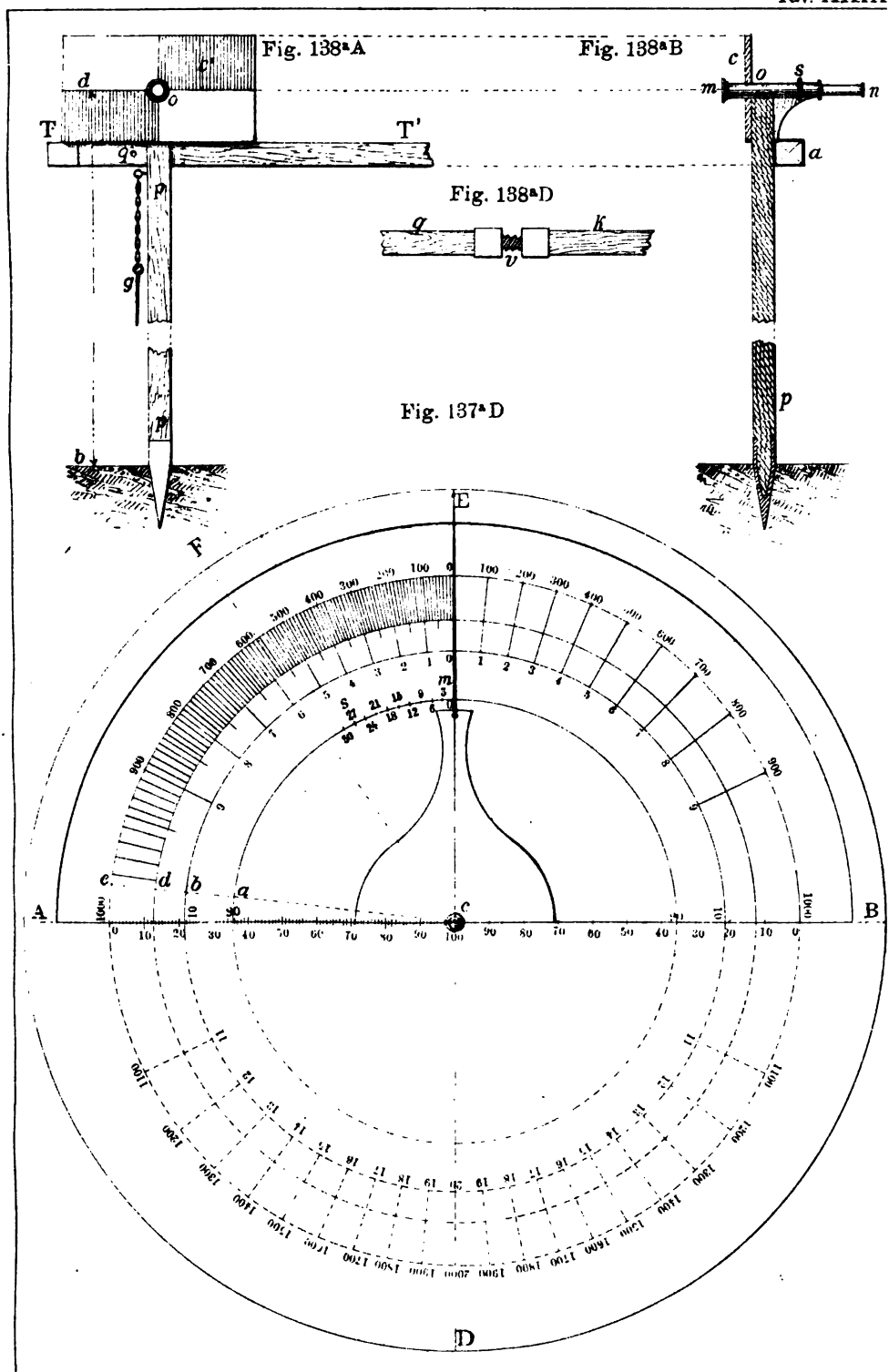
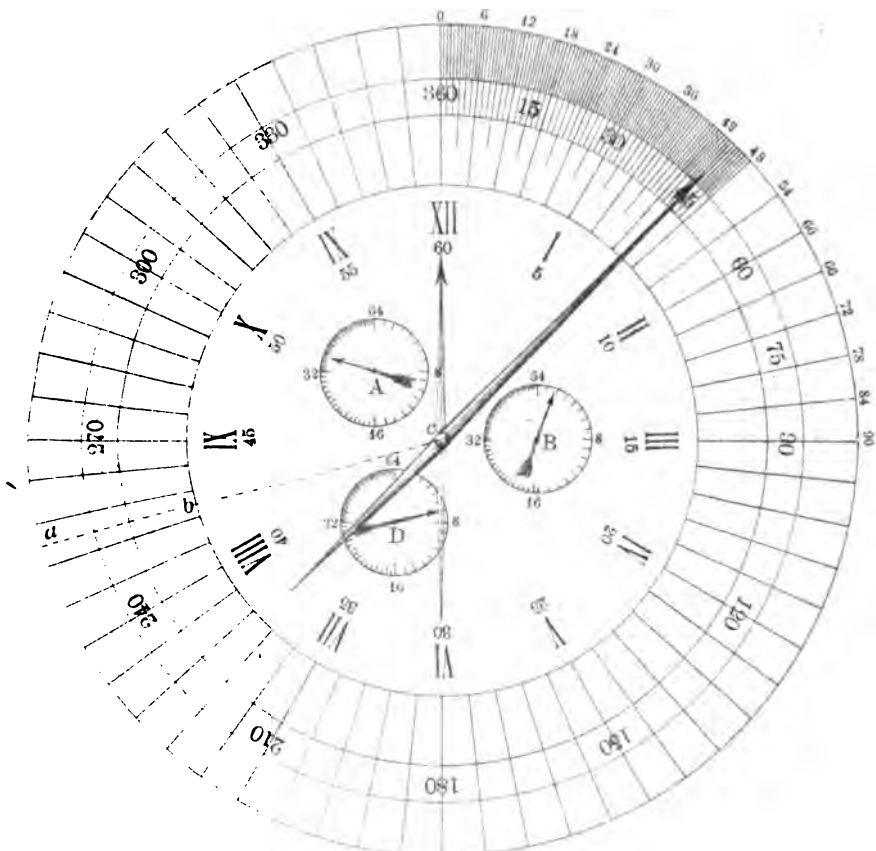


Fig. 138ªA
Fig. 138ªB
Fig. 138ªD
Fig. 137ªD
T
T'
d
o
c'
q
p
g
b
F
c
s
m
n
a
k
v
E
A
B
D
c
m
a
b
d
e

Fig. 139ª


A
B
C
D
p
q
0
6
12
18
24
30
36
42
48
54
60
66
72
78
84
90
15
30
45
60
75
90
105
120
135
150
165
180
195
210
225
240
255
270
285
300
315
330
345
360

Math 5108.99.3
Geometria rettilinea e curvilinea,
Cabot Science
003334674
3 2044 091 904 268